CAPÍTULO 7

Resuelve ecuaciones cuadráticas

Matemáticas en la vida diaria

Supermodelos La mayoría del trabajo de los programadores de computadoras depende de las ecuaciones y las expresiones matemáticas que forman parte del software que diseñan. Por ejemplo, muchos juegos de computadora y de video deben modelar el movimiento de cuerpos en el aire, como una pelota en un juego de béisbol, fútbol americano, fútbol o golf; o el movimiento de flechas y otros proyectiles—¡quizás hasta un globo lleno de agua! El movimiento de estos cuerpos se conoce como *trayectoria* y se puede modelar usando ecuaciones cuadráticas.

Piensa al respecto Imagina la trayectoria de una pelota de fútbol americano que ha sido pateada para tratar de anotar un gol de campo. ¿Puedes describir su trayectoria?

Carta a la familia

Estimados alumno(a) y familiares:

En el siguiente capítulo de la clase de matemáticas, estudiaremos la solución de ecuaciones cuadráticas. En este tipo de ecuaciones, la variable principal está elevada al cuadrado y se puede expresar en la forma $ax^2 + bx + c = 0$, donde a, b y c son constantes.

Las ecuaciones cuadráticas son un tema muy importante en matemáticas y en las ciencias en general. Sirven para describir el movimiento de cuerpos en el espacio, como una pelota de baloncesto, un automóvil, los satélites y los cohetes. También sirven para determinar la forma de las antenas de radar, las antenas parabólicas y los espejos que se usan en los telescopios.

Aprenderemos y practicaremos tres importantes métodos para resolver ecuaciones cuadráticas: solución de cuadrados perfectos, factorización y el uso de la fórmula cuadrática.

- Aprenderemos a identificar un cuadrado perfecto, expresión que equivale a una expresión lineal simple, multiplicada por sí misma:

$$x^2 + 4x + 4 = (x + 2)(x + 2) = (x + 2)^2$$
$$4x^2 - 12x + 9 = (2x - 3)(2x - 3) = (2x - 3)^2$$

- Otro método importante para resolver ecuaciones cuadráticas es la factorización. Este método sirve cuando la ecuación cuadrática equivale al producto de dos expresiones lineales diferentes:

$$x^2 - 8x + 15 = (x - 5)(x - 3)$$
$$2x^2 - 8x - 10 = (2x + 2)(x - 5)$$

- El tercer método es el uso de la fórmula cuadrática. Esta fórmula sirve para resolver no sólo ecuaciones que sean cuadrados perfectos o que sean fácilmente factorizables, sino toda ecuación cuadrática que se pueda expresar en la forma $ax^2 + bx + c = 0$.

Vocabulario En este capítulo, aprenderemos los siguientes nuevos términos:

factorización **trinomio**

¿Qué pueden hacer en el hogar?

El conocimiento de las ecuaciones cuadráticas le permitirá su hijo(a) dominar uno de los temas más importantes del álgebra. El trabajo es abstracto, pero el dominio de este tema le ayudará a su hijo(a) en sus estudios futuros de álgebra. Estimúlenle a que les muestre los problemas en los que estamos trabajando y a que les explique los métodos que está aprendiendo.

7.1 Resuelve usando la vuelta atrás

Como lo sabes, la vuelta atrás es un proceso paso a paso para anular operaciones. Para poder resolver una ecuación usando la vuelta atrás, debes saber cómo anular adiciones, sustracciones, multiplicaciones y divisiones. Para usar la vuelta atrás en la solución de ecuaciones no lineales, como quiera, necesitas anular otras operaciones también.

Piensa & comenta

Para estar seguro, ¿cómo verificarías que una operación realmente *anula* otra? Da un ejemplo para ilustrar tu razonamiento.

¿Qué harías para anular cada una de estas operaciones?

- encontrar la raíz cuadrada de un número
- encontrar el recíproco de un número
- cambiar el signo de un número
- aumentar un número positivo a la *en*ésima potencia, como, 2^3

Datos de interés

Las ecuaciones cuadráticas se usan en muchos contextos. Por ejemplo, $h = 1 + 2t - 4.9t^2$ podría darte la altura en metros al tiempo t en segundos de alguien que al brincar en un trampolín tiene una velocidad inicial de 2 m/s.

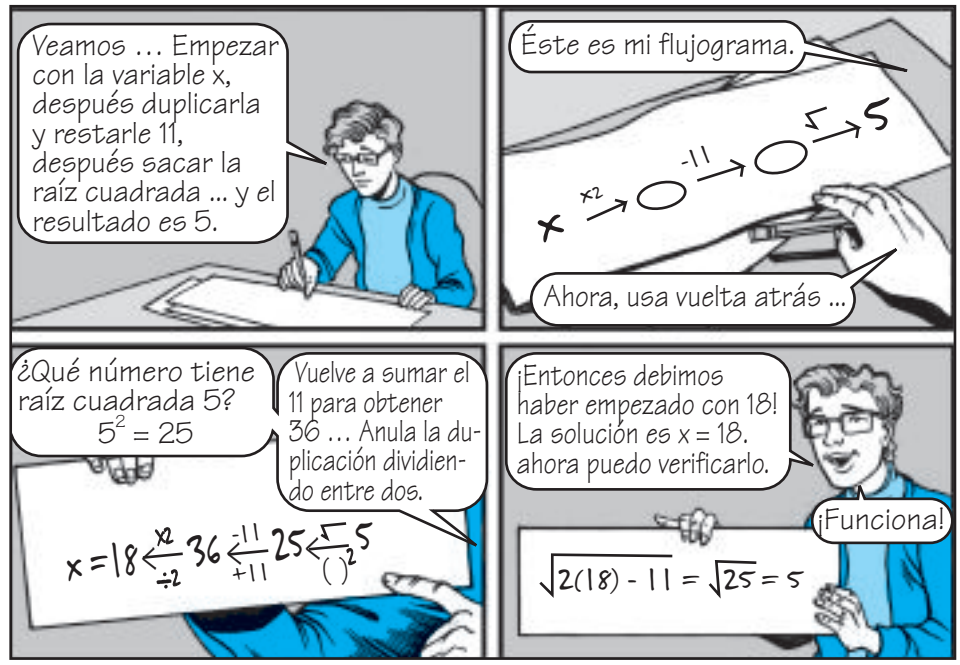
CONTENTS

Investigación 1 Usa la vuelta atrás con nuevas operaciones

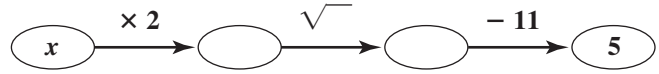
En esta investigación, pondrás en práctica las ideas referentes a anular operaciones de Piensa & comenta.

Serie de problemas A

Ben está resolviendo la ecuación $\sqrt{2x - 11} = 5$.


Veamos ... Empezar con la variable x, después duplicarla y restarle 11, después sacar la raíz cuadrada ... y el resultado es 5.
Éste es mi flujograma.
x
×2
-11
√
5
Ahora, usa vuelta atrás ...
¿Qué número tiene raíz cuadrada 5?
$5^2 = 25$
Vuelve a sumar el 11 para obtener 36 ... Anula la duplicación dividiendo entre dos.
$x = 18 \xleftarrow[\div 2]{\times 2} 36 \xleftarrow[+11]{-11} 25 \xleftarrow[(\,)^2]{\sqrt{\ }} 5$
¡Entonces debimos haber empezado con 18! La solución es x = 18. ahora puedo verificarlo.
¡Funciona!
$\sqrt{2(18) - 11} = \sqrt{25} = 5$

Kai dice que el flujograma de Ben debería realmente ser como éste:



1. ¿Cuál es el error en el flujograma de Kai?

2. ¿Qué ecuación resolverías al usar la vuelta atrás con el flujograma de Kai?

3. Considera la ecuación $\sqrt{3x + 7} = 8$.

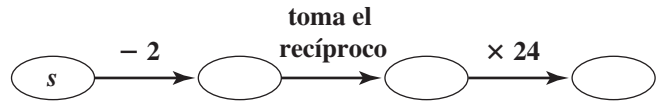
a. Dibuja un flujograma para la ecuación.

b. Usa la vuelta atrás para resolver. Verifica tu respuesta, reemplazándola dentro de la ecuación.

Recuerda

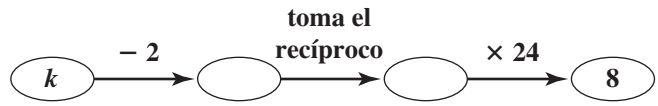
El signo $\sqrt{\ }$ se refiere a las raíces cuadradas no negativas de un número, si es que existe.

4. Este flujograma es para la expresión $\frac{24}{s-2}$.



a. Trata de usar el flujograma con unos cuantos números para ver cómo funciona. Registra tus resultados.

b. Este flujograma es para la ecuación $\frac{24}{k-2} = 8$.

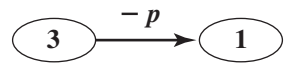


Usa la vuelta atrás para resolver. Reemplaza tu solución dentro de la ecuación y verifica que sea correcta.

5. Este flujograma es para la ecuación $3 - p = 1$. El símbolo $+/-$ significa que tomas el opuesto del valor, de tal manera que cambie su signo.

a. Resuelve la ecuación usando la vuelta atrás.

b. Ben hizo este flujograma para $3 - p = 1$, pero se estancó cuando trató de usar la vuelta atrás. ¿Por qué no puedes usar este flujograma para resolver la ecuación?



6. Este flujograma es para la expresión $\frac{2(3-t)}{4}$.

a. Prueba el flujograma con unos cuantos números para ver cómo funciona.

b. Este flujograma es para la ecuación $\frac{2(3-t)}{4} = 5$.

Usa la vuelta atrás para resolver y verifica que sean correctas.

c. ¿Qué operación anula la de "cambiar el signo"?

7. Al cambiar el signo de un número puedes pensar en multiplicar por $^{-}1$. Por ejemplo, $^{-}x = {}^{-}1 \cdot x$.

a. Regularmente, ¿cómo anulas la multiplicación por un número?

b. ¿Qué te sugieren los resultados de la Parte c del Problema 6 sobre otro modo para anular multiplicaciones por $^{-}1$?

CONTENTS

Serie de problemas B

Resuelve cada ecuación usando la vuelta atrás.

1. $\frac{4}{x} = 0.125$

2. $\frac{8 - z}{2} = 9$

3. $\frac{7 - m}{2} = 3$

4. $5\left(20 - \frac{a}{4}\right) = 85$

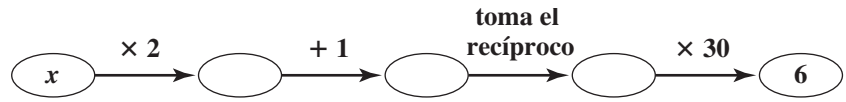
5. Considera esta ecuación.

$$\frac{12}{3s - 1} = 6$$

a. Dibuja un flujograma para la ecuación.

b. Resuelve la ecuación usando la vuelta atrás y verifica tu solución.

6. Katie dibujó este flujograma.



a. ¿Qué ecuación se puede resolver con el flujograma de Katie?

b. Resuelve la ecuación y verifica tu solución.

Comparte & resume

En esta investigación, aprendiste a cómo anular una operación extrayendo la raíz cuadrada, tomando el recíproco y cambiando el signo de un número.

1. Escribe una expresión que pueda resolverse usando la vuelta atrás y que use estas tres operaciones. Encuentra la solución de tu ecuación.

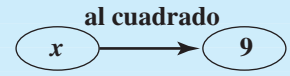
2. Intercambia ecuaciones con un compañero y trata de resolver su ecuación. Verifica tu solución con la sustitución.

Investigación 2 La vuelta atrás con potencias

En esta investigación, extenderás los tipos de ecuaciones en los que puedes usar la vuelta atrás.

Piensa & comenta

Este flujograma es para la ecuación $x^2 = 9$. Para resolver esta ecuación usando la vuelta atrás, debes anular la operación de elevar al "cuadrado" sacando la raíz cuadrada.



- ¿Cuántas soluciones hay para $x^2 = 9$? ¿Cómo lo sabes?

Ahora considera la ecuación $(d - 2)^2 = 25$.

- Escribe las operaciones, en el orden que usarías para evaluar la expresión $(d - 2)^2$ de algunos valores de d.
- Dibuja un flujograma para la ecuación $(d - 2)^2 = 25$.
- Esta ecuación tiene dos soluciones. ¿Qué paso dentro de tu flujograma hace posible que haya dos resultados? Explica.
- A medida que uses la vuelta atrás más allá de los pasos que hagan que dos soluciones sean posibles, hay dos valores posibles para cada óvalo. Piensa en una forma dentro de la que podrías mostrar dos valores en cada paso y después encuentra las dos soluciones de la ecuación.

Serie de problemas C

1. Considera la ecuación $(a + 5)^2 = 25$.

a. Dibuja un flujograma para la ecuación.

b. Resuelve $(a + 5)^2 = 25$ usando la vuelta atrás y verifica tu resultado con sustitución. ¿Puedes encontrar más de una ruta para usar la vuelta atrás (y entonces más de una solución)?

Para cada ecuación, dibuja un flujograma. Resuelve la ecuación usando la vuelta atrás y verifica tus resultados.

2. $2(b - 4)^2 + 5 = 55$

3. $3(c - 5)^2 - 5 = 7$

CONTENTS

Datos de interés

La *bujía-pie* mide la cantidad de luz bajo un área de 1 pie cuadrado. Originalmente fue definida con una vela estándar que ardía a un pie de distancia de la superficie.

Resuelve cada ecuación.

4. $(d - 2)^2 - 20 = 44$

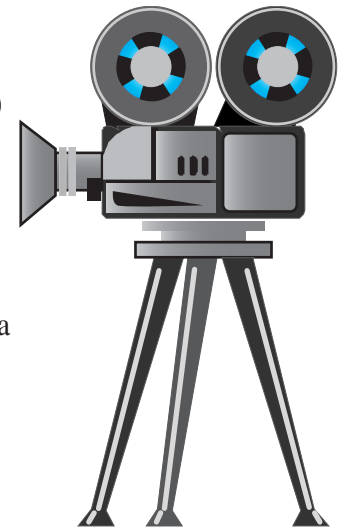
5. $\sqrt{(2p - 3)^2 - 5} = 2$

6. $3(6 - T)^3 - 1 = 23$

7. $(e - 3)^4 = 81$

8. Cuando los cineastas filman en el exterior durante la noche, con frecuencia usan reflectores para iluminar a los actores y el escenario. La relación entre la luminosidad de un cuerpo F (medida en *bujías-pie*) y su distancia d (medida en pies) a partir de la fuente de luz sigue una *ley de cuadrados inversos*. Para un reflector particular de 2,000 vatios, la fórmula podría ser

$$F = \frac{360{,}000}{d^2}$$



a. ¿Por qué crees que se llama ley de cuadrados inversos?

b. Calcula la luminosidad de $d = 10$, 20, 30 y 50.

c. Explica los efectos en la luminosidad de un cuerpo al acercarse o alejarse de la fuente de luz.

d. Dibuja un flujograma para la fórmula de la luminosidad.

e. Usa la vuelta atrás para resolver la ecuación

$$120 = \frac{360{,}000}{d^2}$$

¿Qué te indica el resultado?

Serie de problemas D

1. Considera esta ecuación.

$$(x - 3)^2 - 5 = 0$$

a. Muestra que $3 + \sqrt{5}$ y $3 - \sqrt{5}$ son soluciones de esta ecuación.

b. Los valores $3 + \sqrt{5}$ y $3 - \sqrt{5}$ son soluciones *exactas* de la ecuación. Debido a que $\sqrt{5}$ es un número irracional, cuando lo escribes en forma decimal, estás dando una *aproximación,* sin importar cuántos lugares decimales uses.

Escribe cada solución de la Parte a como un decimal preciso de dos lugares.

Para cada ecuación, da las soluciones exactas y las soluciones aproximadas correctas de dos lugares decimales.

2. $h^2 - 5 = 45$

3. $(2m - 3)^2 + 7 = 9$

4. $3(J + 5)^2 - 2 = 7$

Comparte & resume

Usa la vuelta atrás para resolver esta ecuación. Explica lo que hiciste en cada paso y registra cualquier lugar en el que hayas tenido un cuidado especial.

$$2(3b - 4)^2 + 1 = 19$$

Ejercicios por tu cuenta

Practica & aplica

1. Considera la ecuación $^{-}\sqrt{2x - 1} = {}^{-}7$.

a. Dibuja un flujograma para la ecuación.

b. Resuelve la ecuación usando la vuelta atrás.

Resuelve cada ecuación.

2. $\sqrt{3x + 1} = 4$

3. $\frac{2}{3p - 1} = 5$

4. $\sqrt{a} = 1.5$

5. $\sqrt{2 - q} = 2.5$

6. $5\sqrt{\frac{z}{5} - 1} = 4$

7. $\frac{9}{4 - 7d} = 18$

8. $2(x - 4)^2 + 5 = 7$

9. $b^2 - 5 = 44$

10. $c^2 - 20 = 44$

11. $(L - 2)^2 - 5 = 44$

12. $(q - 2)^2 + 8 = 44$

13. $y^3 = 27$

14. $3(2w - 3)^2 - 5 = 70$

15. $(2t - 3)^2 - 20 = 44$

16. $y^3 = {}^{-}27$

17. $(x + 2)^3 = 64$

Conecta & amplía

18. Un hombre que controla un robot con el ojo de una cámara, lo ha enviado a un edificio en llamas para que recupere una caja fuerte llena de dinero. Él le ha dado este grupo de comandos:

```
20 pies hacia delante.
Doblar a la derecha.
15 pies hacia delante.
Doblar a la izquierda.
30 pies hacia delante.
Doblar a la derecha.
25 pies hacia delante.
Recoge la caja fuerte.
```

El robot está parado ahora dentro de la casa en llamas sosteniendo la caja fuerte, pero el hombre que lo controla se ha enfermado con el humo y te han pedido que tú traigas al robot de regreso. Usa lo que sabes sobre la vuelta atrás para escribir un grupo de comandos que hagan salir al robot de la casa en llamas y que saque la caja fuerte.

En tus propias palabras

Explica cómo puedes decidir si una ecuación se puede resolver correctamente usando la vuelta atrás. Después proporciona el ejemplo de una ecuación que pueda resolverse directamente al usar la vuelta atrás y un ejemplo de una que no pueda.

19. Mary Ann usó su calculadora para calcular $\sqrt{2}$, anotó el resultado y luego lo borró de la calculadora. Después usó su calculadora para elevar al cuadrado el número que había anotado y obtuvo 1.99998.

Mary Ann concluyó que elevar al cuadrado no anula exactamente el sacar la raíz cuadrada. ¿Estás de acuerdo con ella? ¿Qué le dirías?

20. Muchas ecuaciones no se pueden resolver correctamente usando la vuelta atrás. Algunas manifiestan la variable más de una vez; otras incluyen variables como exponentes.

Éstas son algunas ecuaciones que no se pueden resolver correctamente al usar la vuelta atrás.

$$f^2 = f + 1 \qquad x = \sqrt{x} + 1 \qquad k^2 + k = 0$$

$$1.1^B = 2 \qquad \frac{1}{x} = x^2 + 2$$

Para cada ecuación a continuación, escribe *sí* si puede resolverse usando la vuelta atrás o escribe *no* si no puede resolverse con este método.

a. $5 = \sqrt{x - 11}$ **b.** $4^d = 9$

c. $3g^2 = 5$ **d.** $\sqrt{x + 1} = x - 4$

21. Usa la vuelta atrás para resolver las ecuaciones de las Partes a y b.

a. $(3x + 4)^2 = 25$

b. $(3x + 4)^2 = 0$

c. ¿Cuántas soluciones encontraste para cada ecuación? ¿Puedes explicar la diferencia?

22. Usa la vuelta atrás para resolver las ecuaciones de las Partes a y b.

a. $(\sqrt{x})^2 = 5$

b. $\sqrt{x^2} = 5$

c. ¿Cuántas soluciones encontraste para cada ecuación? ¿Puedes explicar la diferencia?

Repaso mixto

Desarrolla cada expresión.

23. $3(3a - 7)$ **24.** $^-2b(8b - 0.5)$

25. $9c(^-8 + 7c)$ **26.** $(d + 3)(d + 6)$

27. $(2e - 4)(e - 6)$ **28.** $(3f + 10)(9f - 1)$

29. $(g + 7)^2$ **30.** $(3h - 1)^2$

31. $(2j + 2)^3$ **32.** $(3k - 2m)^2$

Geometría Calcula el área de cada rectángulo.

33.

34.

35. Ciencia biológica Enumera las cantidades aproximadas de material vegetal seco que cada tipo de hábitat produce en 1 año.

Hábitat	Material vegetal (gramos) producido por metro cuadrado
Arrecife de coral	2,500
Pluviselva	2,200
Bosque tropical templado	1,250
Sabana	900
Mar abierto	125
Semidesierto	90

Fuente: *Ultimate Visual Dictionary of Science.* London: Dorling Kindersley Limited, 1998.

a. Un gramo es equivalente a 0.035 de onza y 1 metro es equivalente a 1.09361 yardas. Determina cuántas onzas de material vegetal produce una yarda cuadrada del arrecife de coral típico en 1 año. Muestra cómo encontraste tu respuesta.

b. Escribe dos declaraciones diferentes que comparen la cantidad de material vegetal producido en una pluviselva con el producido en un bosque tropical templado.

c. El mar Báltico cubre aproximadamente 422,000 kilómetros cuadrados. Aproximadamente, ¿cuántos kilogramos de material vegetal se producen en el mar Báltico en un año? Muestra cómo encontraste tu respuesta.

Recuerda

1 km = 1,000 m
1 kg = 1,000 g

7.2 Resuelve con factorización

Algunas ecuaciones cuadráticas se pueden resolver fácilmente usando la vuelta atrás. Un segundo método de solución, la factorización, puede usarse para resolver otras ecuaciones cuadráticas con bastante facilidad.

Cuando una ecuación cuadrática consta de un producto de dos factores a un lado del signo de igualdad y del 0 al otro lado, tal como

$$(x - 2)(x + 5) = 0$$

las soluciones se pueden encontrar con exactitud. Esto se debe a que el 0 tiene una propiedad especial.

Piensa & comenta

Si el producto de dos factores es 0, ¿qué debe ser verdadero sobre los factores?

Encuentra todos los valores de k que satisfagan la ecuación $k(k - 3) = 0$. Explica cómo sabes que has encontrado todos.

Ahora encuentra todos los valores de x que satisfagan $(x - 2)(x + 5) = 0$. Explica cómo los encontraste.

Investigación 1 Factoriza expresiones cuadráticas

Ahora vas a usar las ideas de Piensa & comenta para resolver algunas ecuaciones escritas como un producto igual a 0.

Serie de problemas A

Encuentra todas las soluciones de cada ecuación.

1. $(t - 1)(t - 3) = 0$

2. $(s + 1)(2s + 3) = 0$

3. $x(3x + 7) = 0$

4. $(p + 4)(p + 4) = 0$

5. Usa la misma idea y encuentra las soluciones de esta ecuación.

$$(2x + 1)(x + 8)(x - 1) = 0$$

Ya has visto la facilidad con la que puedes resolver ecuaciones que están escritas como productos de factores iguales a 0. Algunas veces puedes volver a escribir una ecuación de esta forma para que la solución sea fácil de encontrar.

En el Capítulo 6, aprendiste a *desarrollar* un producto de dos binomios, como $(x + 3)(x - 2)$. El reverso de este proceso (volver a escribir una expresión como un producto de factores) se llama **factorización.** Por ejemplo, la expresión $x^2 + x - 6$ se puede factorizar en $(x + 3)(x - 2)$.

VOCABULARIO
factorización

Piensa & comenta

Quizá recuerdes del Capítulo 6 que la expresión $(3x + 4)(3x - 4)$ puede volverse a escribir como $9x^2 - 16$ cuando se desarrolla. Una expresión como $9x^2 - 16$ se llama *diferencia de dos cuadrados.* ¿Puedes explicar por qué?

Ahora piensa en invertir el desarrollo. ¿Cómo factorizarías $4a^2 - 25$? Es decir, ¿cómo lo volverías a escribir como el producto de dos factores?

VOCABULARIO
trinomio

En el Capítulo 6, también aprendiste a cómo elevar al cuadrado un binomio y volverlo a escribir como un **trinomio,** una expresión con 3 términos diferentes. Por ejemplo:

$$(x - 5)^2 = x^2 - 10x + 25 \qquad (b + 5)^2 = b^2 + 10b + 25$$

Vuelve a plantear cada trinomio a continuación como el cuadrado de un binomio.

$$c^2 + 4c + 4 \qquad 16d^2 - 8d + 1$$

Un trinomio como $16d^2 - 8d + 1$ se llama *trinomio cuadrado perfecto.* ¿Puedes explicar por qué?

¿Cuál de estos cuatro trinomios son cuadrados perfectos?

$$x^2 + 6x + 9 \qquad k^2 - 8k + 25$$

$$4y^2 + 4y + 4 \qquad 49s^2 - 28s + 4$$

Observando sólo los coeficientes ¿Cómo puedes determinar si *cualquier* trinomio en la forma $ax^2 + bx + c$ es un cuadrado perfecto?

Recuerda

Restar un número significa que el coeficiente es negativo. Por ejemplo, en la expresión $16x^2 - 8x + 1$ el coeficiente de x es -8.

Serie de problemas B

En los Problemas 1 al 8, indica si la expresión cuadrática a la izquierda del signo de igualdad es la diferencia de dos cuadrados, o un trinomio de cuadrado perfecto. De serlo, vuelve a escribir la ecuación en forma factorizada y resuélvela. Y si no es una de estas formas especiales, explica cómo sabes que no lo es.

1. $x^2 - 64 = 0$

2. $p^2 + 64 = 0$

3. $x^2 - 16x - 64 = 0$

4. $k^2 - 16k + 64 = 0$

5. $9y^2 - 1 = 0$

6. $9m^2 + 6m + 1 = 0$

7. $9g^2 - 4g - 1 = 0$

8. $y^2 + 9 = 0$

Cada ecuación a continuación tiene dos variables. Si la expresión cuadrática es la diferencia de dos cuadrados, o un trinomio cuadrado perfecto, vuelve a escribir la ecuación en forma factorizada y resuelve para a. Si no es de ninguna forma especial, explica cómo sabes que no lo es.

9. $a^2 + 9b^2 = 0$

10. $a^2 - 4ab + 4b^2 = 0$

11. $4a^2 - b^2 = 0$

Comparte & resume

1. Da un ejemplo de un trinomio cuadrado perfecto. Después da un ejemplo de una expresión cuadrática que sea la diferencia de dos cuadrados. Explica cómo sabes que tus expresiones están en la forma correcta.

2. Explica por qué las únicas soluciones de $4x^2 - 9 = 0$ son $x = 1.5$ y $x = {}^-1.5$.

Datos de interés

Las ecuaciones cuadráticas se usan con frecuencia para describir el cambio de posición de un cuerpo a través del tiempo. Por ejemplo, la ecuación $d = 25 - 3t^2$ puede describir la distancia a la que esta una hiena de un conejo después de t segundos si empezó a correr hacia el conejo a 25 metros de distancia de él.

CONTENTS

Investigación 2 Practica con factorización

Si una expresión cuadrática es igual a 0 y se puede factorizar fácilmente, encontrar sus factores es una forma eficaz de resolver la ecuación. En esta investigación, aprenderás algunas nuevas estrategias para determinar si una expresión cuadrática puede factorizarse con facilidad y para factorizarla cuando puedas. Por ejemplo, considera esta expresión:

$$x^2 + 8x + 12$$

Si dicha expresión se puede factorizar, puede volverse a escribir como el producto de dos expresiones lineales:

$$(x + m)(x + n)$$

Al multiplicar términos obtienes

$$x^2 + (m + n)x + mn$$

Puedes usar esta idea como ayuda para factorizar cualquier expresión cuadrática en la que a, el coeficiente de la variable al cuadrado, sea igual a 1.

EJEMPLO

¿Puede factorizarse $x^2 + 8x + 12$? Si es así, resuelve la ecuación $x^2 + 8x + 12 = 0$.

Primero compara la forma desarrollada de $(x + m)(x + n)$ con la expresión dada:

$$x^2 + 8x + 12$$

$$x^2 + (m + n)x + mn$$

Si $x^2 + 8x + 12$ se puede factorizar en la forma $(x + m)(x + n)$, el producto de m y n debe ser 12 y su suma debe ser 8. Los únicos dos números que se ajustan a esta condición son 6 y 2. Esto quiere decir que la expresión *puede* factorizarse y la ecuación puede volverse a escribir como:

$$(x + 2)(x + 6) = 0$$

Entonces, la ecuación $x^2 + 8x + 12 = 0$ tiene dos soluciones, $^-2$ y $^-6$.

En esta investigación, considerarás sólo casos en los que m y n sean enteros.

Serie de problemas C

Haz lo siguiente para los Problemas 1 al 6:

- Piensa en la expresión como un caso especial de $(x + m)(x + n)$ y plantea los valores de m y n.
- Usa el hecho de que $(x + m)(x + n) = x^2 + (m + n)x + mn$ para desarrollar la expresión.

1. $(x + 7)(x + 1)$ **2.** $(x + 2)(x + 5)$

3. $(x - 4)(x - 5)$ **4.** $(x + 2)(x - 3)$

5. $(x - 2)(x + 3)$ **6.** $(x + 5)(x - 4)$

Para los Problemas 7 al 10, usa el hecho de que $(x + m)(x + n) = x^2 + (m + n)x + mn$ para hacer lo siguiente:

- Determina a qué son iguales $m + n$ y mn. Para esto, encuentra los valores de m y n.
- Vuelve a escribir la expresión como el producto de dos binomios. Desarrolla el producto para verificar el resultado.

7. $x^2 + 7x + 6 = (x + \_\_)(x + \_\_)$

8. $x^2 - 7x + 6 = (x - \_\_)(x - \_\_)$

9. $x^2 - 4x - 12 = (x - \_\_)(x + \_\_)$

10. $x^2 + 4x - 12 = (x - \_\_)(x + \_\_)$

Usa el método demostrado en el Ejemplo de la página 445 para resolver estas ecuaciones.

11. $x^2 - 10x + 16 = 0$ **12.** $x^2 + 6x - 16 = 0$

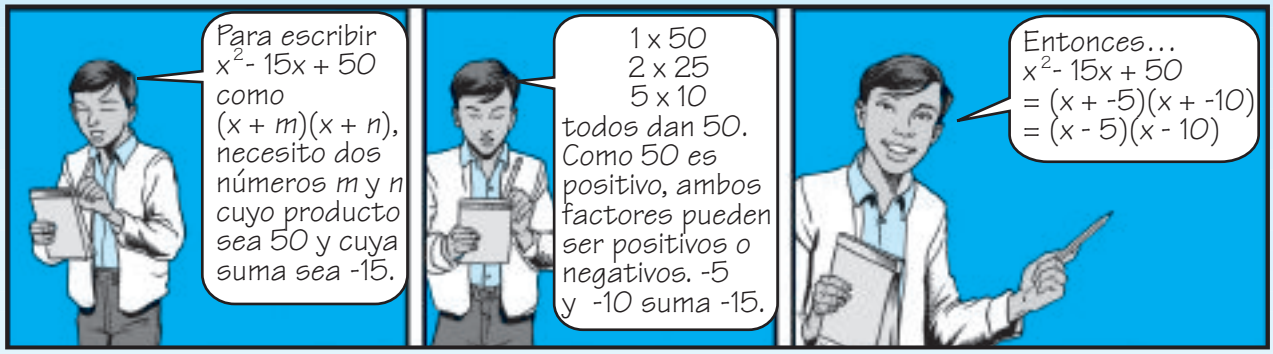
Datos de interés

En la ecuación cuadrática $x = 10t + \frac{1}{2}(2.5)t^2$ describe la distancia en metros recorrida por un motociclista que empieza desde cierto punto a una velocidad de 10 m/s y aumenta su velocidad o acelera a una tasa de 2.5 m/s^2.

CONTENTS

Piensa & comenta

Kai organizó las posibilidades para factorizar trinomios.


Para escribir $x^2 - 15x + 50$ como $(x + m)(x + n)$, necesito dos números m y n cuyo producto sea 50 y cuya suma sea -15.
1 x 50
2 x 25
5 x 10
todos dan 50. Como 50 es positivo, ambos factores pueden ser positivos o negativos. -5 y -10 suma -15.
Entonces...
$x^2 - 15x + 50$
$= (x + -5)(x + -10)$
$= (x - 5)(x - 10)$

Usa la aproximación de Kai para factorizar estas expresiones.

$x^2 + 11x + 10$ $\qquad$ $x^2 - 7x + 10$ $\qquad$ $x^2 - 3x - 10$

Explica qué sucede si usas la aproximación de Kai con $x^2 + 6x + 10$.

Serie de problemas D

Factoriza cada expresión cuadrática con el método de Kai, o declara si no se puede factorizar usando su método.

1. $x^2 + 6x + 5$ $\qquad$ **2.** $b^2 + 4b - 5$

3. $w^2 - 2w + 1$ $\qquad$ **4.** $t^2 + 9t - 18$

5. $s^2 - 10s - 24$ $\qquad$ **6.** $c^2 - 4c + 5$

7. Usa la aproximación de Kai para resolver la ecuación $w^2 + 4w - 12 = 0$.

Si cada término de una expresión cuadrática tiene un factor común, volver a escribirlo puede facilitar la factorización. Por ejemplo, $2x^2 + 12x + 10$ se puede volver a escribir como $2(x^2 + 6x + 5)$, que se factoriza como $2(x + 1)(x + 5)$.

Encuentra el factor común para cada expresión y después factoriza cada expresión tanto como sea posible.

8. $3a^2 + 18a + 15$ $\qquad$ **9.** $2b^2 + 8b - 10$

10. $4x^2 - 8x + 8$ $\qquad$ **11.** $5t^2 + 25t - 70$

Reto Algunas veces una expresión cuadrática se puede factorizar aunque el coeficiente de x^2 no sea 1 y los términos no tengan un factor común. Por ejemplo, $2x^2 - 9x + 9$ se puede factorizar como $(2x - 3)(x - 3)$. Usa estrategias como las que usaste antes para factorizar estas expresiones.

12. $3x^2 - 11x - 4$ $\qquad$ **13.** $8x^2 + 2x - 3$

Comparte & resume

Si se te proporcionara una expresión cuadrática para factorizar, ¿qué pasos seguirías para factorizarla o para determinar que no se puede factorizar con enteros?

Investigación 3 Resuelve cuadráticas por factorización

A veces puedes reordenar los términos en una expresión cuadrática para ver cómo se puede factorizar la expresión, o si se puede factorizar del todo.

Piensa & comenta

La Sra. Torres le dio a su grupo un acertijo numérico.

Multipliqué un número por sí mismo y después le sumé 14. Me dio un resultado que fue 1 menos que 8 veces el número original. ¿Con qué número empecé?
Al principio todos estaban perplejos ... después Héctor dijo ...
Usemos x para representar el número.
Después $x^2 + 14$ representa el número multiplicado por sí mismo y sumado a 14.
Tala dijo ...
Y 8x - 1 representa 1 menos que 8 veces el número.
Tamika dijo ...
$x^2 + 14 = 8x - 1$
Bueno, podríamos reordenarlos.
Empecemos a sumar 1 a ambos lados.

¿Por qué la sugerencia de Tamika es buena? ¿Qué ecuación cuadrática debería encontrar la clase cuando terminen de reordenarla?

¿Se puede factorizar la ecuación cuadrática? Si es así, ¿cuáles con los factores?

¿Con qué números pudo haber empezado la Sra. Torres? Verifica tu respuesta en el acertijo numérico original.

Recuerda

Cuando resuelvas una ecuación que incluya ecuaciones algebraicas, siempre verifica que las soluciones aparentes no generen denominadores iguales a 0 en la ecuación original.

Serie de problemas E

Reoderna cada ecuación de manera que puedas resolverla con factorización. Encuentra la solución.

1. $4a + 3 = 6a + a^2$

2. $b^2 - 12 = 4b$

3. $c(c + 4) + 3c + 12 = 0$

4. $d + \frac{6}{d} = 5$

5. $\frac{(x + 3)(x - 2)^2}{x - 2} = 3x - 3$ (Ayuda: Reduce primero la fracción.)

6. Kenyon desafió a su maestra, la Srta. Hiroshi, con un acertijo numérico: "Estoy pensando en un número. Si multiplica mi número por 2 más que el número, el resultado será 1 menos que cuatro veces mi número".

a. Escribe una ecuación para el acertijo de Kenyon y después usa la factorización para resolverla. Verifica que tu respuesta se ajuste al acertijo.

b. Kenyon espera que su maestra encuentre dos soluciones a su acertijo. ¿Por qué no lo hizo?

7. Una alfombra rectangular tiene un área de 15 metros cuadrados. Su longitud es dos metros más que su ancho.

a. Escribe una ecuación para mostrar la relación entre el área de la alfombra y su ancho.

b. Resuelve tu ecuación. Explica por qué sólo una de las soluciones es útil para calcular las dimensiones de la alfombra.

c. ¿Cuáles son las dimensiones de la alfombra?

8. Cuando se le suma 20 a un número, el resultado es el cuadrado del número. ¿Cuál podría ser el número? Muestra cómo encontraste tu respuesta.

9. La suma de los cuadrados de dos enteros consecutivos es 145. Encuentra todos los enteros posibles. Muestra cómo encontraste tu respuesta.

10. Gabriela trataba de resolver la ecuación $(x + 1)(x - 2) = 10$. Así es como pensó:

Dos factores de 10 son 5 y 2.
Entonces, $x + 1 = 5$ debe ser una solución de la ecuación.
Esto quiere decir que $x = 4$.
Lo verificaré: $(4 + 1)(4 - 2) = 5 \cdot 2 = 10$.
¡Se cumple!

a. ¿Qué habría pasado si Gabriela hubiera dicho que $x - 2 = 5$?

b. ¿Crees que el método de Gabriela es una fórmula eficaz de resolver una ecuación cuadrática? Explica.

c. Resuelve la ecuación de Gabriela, $(x + 1)(x - 2) = 10$. Para empezar, desarróllala y después reordénala. Verifica cada solución.

d. Resuelve $(x + 5)(x - 2) = 30$.

Datos de interés

La ecuación cuadrática $K = \frac{1}{2}(64)v^2$ proporciona la energía cinética de un paracaidista con una masa de 64 kg (cerca de 141 libras) que cae del cielo con una velocidad v en m/s.

Comparte & resume

1. Inventa un problema de áreas que requiera resolver una expresión cuadrática.

2. Trata de resolver tu problema mediante factorización. Si puedes, proporciona las soluciones de la ecuación y después responde la pregunta. Si no, explica por qué la expresión no puede factorizarse.

Ejercicios por tu cuenta

Practica & aplica

Resuelve cada ecuación.

1. $(x + 5)(x + 7) = 0$

2. $(x - 5)(x + 7) = 0$

3. $(x - 5)(x - 7) = 0$

4. $(x + 5)(x - 7) = 0$

En los Ejercicios 5 al 14, indica si la expresión a la izquierda en el signo de igualdad es una diferencia de cuadrados o un trinomio cuadrado perfecto. Si lo es, indica cuál es y después factoriza la expresión y despeja x en la ecuación. Si la expresión no es ninguna de las dos formas, escríbelo.

5. $x^2 - 49 = 0$

6. $x^2 + 49 = 0$

7. $x^2 + 14x - 49 = 0$

8. $x^2 - 14x + 49 = 0$

9. $49 - x^2 = 0$

10. $x^2 + 14x + 49 = 0$

11. $a^2x^2 + 4ab + b^2 = 0$

12. $a^2x^2 + 4abx + 4b^2 = 0$

13. $m^2x^2 - n^2 = 0$

14. $m^2x^2 + n^2 = 0$

Factoriza cada expresión cuadrática que pueda factorizarse con enteros. Identifica aquellas que no y explica por qué no pueden factorizarse.

15. $d^2 - 15d + 54$

16. $g^2 - g - 6$

17. $z^2 + 2z - 6$

18. $h^2 - 3h - 28$

19. $2x^2 - 8x - 10$

20. $3c^2 - 9c + 6$

Resuelve cada ecuación factorizando con enteros, si es posible. Si una ecuación no puede resolverse de esta manera, explica por qué.

21. $k^2 + 15k + 30 = 0$

22. $n^2 - 17n + 42 = 0$

23. **Reto** $2b^2 - 21b + 10 = 0$

24. **Reto** $8r^2 + 5r - 3 = 0$

25. $4x + x^2 = 21$

26. $h^2 + 12 = 3h$

27. $14e = e^2 + 24$

28. $g^2 + 64 = 16g$

29. $u^2 + 5u = 36$

30. $(x + 3)(x - 4) = 30$

31. $\frac{(x + 1)^3}{x + 1} = 5x + 5$ (Ayuda: Reduce la fracción primero.)

32. Carlos multiplicó un número por sí mismo y después le sumó 6. El resultado era 5 veces el número original. Escribe y resuelve una ecuación para encontrar el número inicial.

Conecta & amplía

33. Debido a que el 7 no es un cuadrado perfecto, la expresión $4x^2 - 7$ no se parece a la diferencia de dos cuadrados. Pero 7 es el cuadrado de *algo*.

a. ¿De qué número es cuadrado 7?

b. ¿Cómo puedes usar la respuesta de la Parte a para factorizar $4x^2 - 7$ dentro del producto de dos binomios?

34. Geometría Cada una de estas expresiones representa una de las áreas sombreadas a continuación.

i. $D^2 - d^2$ **ii.** $\pi(r + w)^2 - \pi r^2$

iii. $(d + w)^2 - d^2$ **iv.** $4r^2 - \pi r^2$

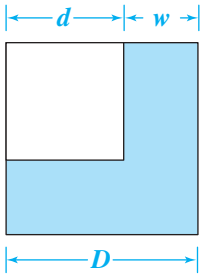


Figura A

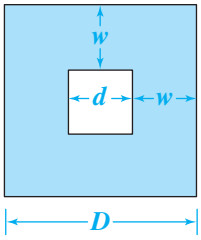


Figura B

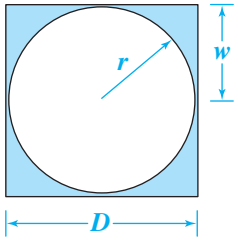


Figura C

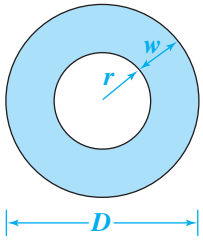


Figura D

a. Relaciona cada expresión con una de las áreas sombreadas de manera que *cada* figura esté relacionada a una expresión diferente.

b. Escribe cada expresión en su forma factorizada. Obtén los factores comunes si es posible.

Factoriza la expresión a la izquierda de cada ecuación tanto como sea posible y encuentra todas las soluciones posibles. Te ayudará el recordar que $x^4 = (x^2)^2$, $x^8 = (x^4)^2$ y $x^3 = x(x^2)$.

35. $x^4 - 1 = 0$ **36.** $x^8 - 1 = 0$

37. $x^3 - 16x = 0$ **38.** $x^3 - 6x^2 + 9x = 0$

39. $x^4 - 2x^2 + 1 = 0$ **40.** $x^4 + 2x^2 + 1 = 0$

Resuelve cada ecuación. Asegúrate de verificar tus resultados. (Ayuda: Factoriza primero el numerador.)

41. $\dfrac{x^2 + 6x + 9}{x + 3} = 10$ **42.** $\dfrac{16x^2 - 81}{4x + 9} = 31$

CONTENTS

En tus propias palabras

Enumera los pasos que seguirías para resolver una ecuación cuadrática por medio de factorización, o para decidir si no puede resolverse de esta manera.

43. Reto Cuando verificas expresiones algebraicas, algunas veces la expresión reducida no es equivalente a la original para todos los valores de la variable. Por ejemplo, considera esta expresión:

$$\frac{5a + 10}{a^2 - 4}$$

a. Factoriza el denominador. ¿Para qué valores de a la expresión es indefinida? Es decir, ¿para qué valores el denominador es igual a 0?

b. Ahora escribe la ecuación anterior en forma factorizada para el numerador y el denominador. Asegúrate de buscar factores comunes en los términos.

c. Reduce la fracción.

d. Ahora trata de evaluar la fracción usando cada valor que haga que la fracción original sea indefinida. (Encontraste esos valores en la Parte a.)

e. Seguramente observaste en la Parte d que la fracción reducida no es equivalente a la fracción original para *todos* los valores de a. Explica por qué sucede esto.

f. Cuando reduces una fracción algebraica, seguramente notas que cualquier valor de la variable ocasiona que la fracción reducida sea diferente a la original. Por ejemplo, la fracción $\frac{x(x + 1)}{3x}$ puede reducirse como $\frac{x + 1}{3}$, donde $x \neq 0$.

Reduce la fracción $\frac{2m + 1}{4m^2 - 1}$.

44. Los Numkena construyen un pequeño patio cuadrado, con bloques cuadrados de 1 pie de largo. Ellos compraron los bloques justos para construir el patio, pero después de construirlo decidieron que era muy pequeño.

Para extenderse a lo largo y a lo ancho del patio en d pies, han comprado 24 bloques más. La longitud original del patio era 5 pies.

a. Dibuja un diagrama para representar esta situación. Asegúrate de mostrar ambos patios, el nuevo y el original.

b. Escribe una ecuación para representar esta situación.

c. Reduce tu ecuación y resuélvela para despejar d, la cantidad a la cual aumentó el largo y el ancho del patio. Verifica tu respuesta.

45. Los *números triangulares* son una sucesión de números que empieza

$$1, 3, 6, 10, \ldots$$

Los números en esta sucesión representan la cantidad de puntos en una serie de formas triangulares.

Triángulo 1 Triángulo 2 Triángulo 3 Triángulo 4

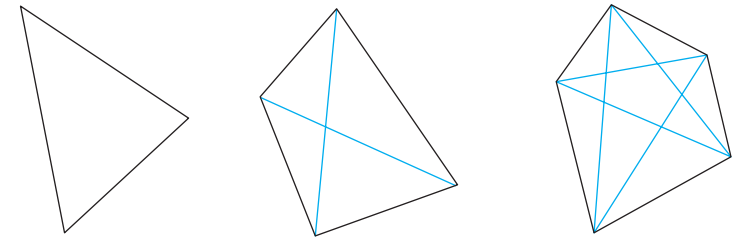
T, el número de puntos en el Triángulo *n*, viene dado por esta ecuación cuadrática:

$$T = \tfrac{1}{2}(n^2 + n)$$

Algunos de los siguientes números son números triangulares. Para cada valor posible de *T,* prepara una ecuación y trata de despejar *n* por medio de la factorización. Si una ecuación no se puede factorizar usando enteros, *T* no puede ser un número triangular. Indica qué números no son triangulares.

a. 55 **b.** 120 **c.** 150 **d.** 200 **e.** 210

46. Geometría En el Capítulo 2, aprendiste que el número de diagonales en un polígono de *n* lados, viene dado por la ecuación $D = \frac{n^2 - 3n}{2}$. A continuación, se muestran unos ejemplos.



Triángulo **Cuadrilátero** **Pentágono**

3 lados ($n = 3$)
0 diagonales

4 lados ($n = 4$)
2 diagonales

5 lados ($n = 5$)
5 diagonales

Algunos de los siguientes números son los números diagonales en un polígono. Para cada valor posible de *D,* plantea una ecuación y trata de despejar *n* mediante factorización. Si una ecuación no se puede factorizar con enteros, *D* no puede ser el número de diagonales en un polígono. Indica cuáles valores no pueden ser la cantidad de diagonales en un polígono.

a. 20 **b.** 30 **c.** 35 **d.** 50 **e.** 54

Repaso mixto

Resuelve cada ecuación haciendo lo mismo en ambos lados.

47. $\frac{3k-5}{5} + k = 5 + k$

48. $7.5a - 6 = 5a + 4$

Determina si los puntos en cada grupo son colineales. Explica cómo lo sabes.

49. $(-2, 13), (1.5, -4.5), (3, -12)$

50. $(-1, -4.2), (3, 0.6), (4, 1.6)$

Determina si los valores en cada tabla podrían representar una relación lineal, una relación cuadrática o ninguna de la dos. Explica tus respuestas.

51.

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	-12.6	-9.2	-5.8	-2.4	1	4.4	7.8

52.

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	-24	-13	-6	0	4	5	6

53.

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	0	-2	-2	0	4	10	18

54. Astronomía Un año luz, la distancia que recorre la luz en un año, es 5.88×10^{12} millas. Contesta estas preguntas sin usar tu calculadora.

a. La estrella Alfa Centauro está a unos 4 años luz de la Tierra. Escribe esta distancia en millas usando la notación científica.

b. La estrella Betelgeuse está a unos 500 años luz de la Tierra. Escribe esta distancia en millas, usando la notación científica.

c. Supón que un rayo de luz va de la Tierra a Betelgeuse y otro rayo de luz va de la Tierra a Alfa Centauro. ¿Qué distancia tuvo que viajar el rayo que fue a Betelgeuse?

Menciona si cada figura tiene simetría de reflexión, simetría de rotación o ambas.

55.

56.

57.

7.3 Completa el cuadrado

La factorización es una herramienta muy útil para resolver ecuaciones, pero los factores y los cuadrados no siempre son fáciles de encontrar. En las Lecciones 7.3 y 7.4, vas a aprender algunas técnicas que te permitirán resolver *todas* las ecuaciones cuadráticas.

Ya has usado la estrategia de "hacer lo mismo en ambos lados" para resolver ecuaciones lineales. En esta estrategia, escribes una serie de ecuaciones equivalentes que tienen las mismas soluciones que la ecuación original pero son más fáciles de resolver. También puedes usar esta estrategia con ecuaciones que contengan raíces cuadradas.

EJEMPLO

Resuelve $\sqrt{3m + 7} = 5$.

$3m + 7 = 25$ después de elevar al cuadrado ambos lados

$3m = 18$ después de restar 7 en ambos lados

$m = 6$ después de dividir ambos lados entre 3

Piensa & comenta

¿Por qué ambos lados se elevaron al cuadrado en el primer paso de la solución del Ejemplo?

En general, ¿qué "mismas cosas" sabes que puedes hacer en ambos lados para resolver una ecuación?

¿Obtendrías una ecuación equivalente si sumaras 1 al numerador de las fracciones en ambos lados de una ecuación? Inténtalo con $\frac{x}{2} = \frac{2x}{4}$.

¿Qué le sucede a una ecuación (como $x = 2$) cuando multiplicas ambos lados por x? ¿Tiene la nueva ecuación las mismas soluciones?

¿Qué le sucede a un grupo de soluciones cuando multiplicas ambos lados de una ecuación (como $x = 2$) por 0?

¿Qué efecto tendría en una ecuación el hecho de que ambos lados se elevaran al cuadrado? Por ejemplo, empieza por $x = 5$.

Cuándo sacas la raíz cuadrada de ambos lados de una ecuación, ¿qué deberías hacer para conservar el mismo número de soluciones? Por ejemplo, empieza con $w^2 = 36$.

Investigación 1 Encuentra cuadrados perfectos

Si puedes reodernar una ecuación cuadrática dentro de la forma de una expresión cuadrática que tenga un cuadrado perfecto en un lado y una constante en el otro, puedes resolver la ecuación, sacando la raíz cuadrada de ambos lados.

EJEMPLO

Resuelve la ecuación $x^2 + 2x + 1 = 7$.

Primero, observa que $x^2 + 2x + 1$ es igual a $(x + 1)^2$, entonces la ecuación $x^2 + 2x + 1 = 7$ puede resolverse sacando la raíz cuadrada de ambos lados:

$$(x + 1)^2 = 7$$
$$\sqrt{(x + 1)^2} = \sqrt{7} \text{ ó } {}^-\sqrt{7}$$

Para escribir "$\sqrt{7}$ ó $^-\sqrt{7}$" más fácilmente, usa el $\pm$ símbolo: $\pm\sqrt{7}$ que se refiere a ambos números, $\sqrt{7}$ y $^-\sqrt{7}$.

$$\sqrt{(x + 1)^2} = \pm\sqrt{7}$$
$$x + 1 = \pm\sqrt{7}$$
$$x = {}^-1 \pm \sqrt{7}$$

De manera que las soluciones son $^-1 + \sqrt{7}$ y $^-1 - \sqrt{7}$.

Recuerda

Una ecuación *exacta* no incluye aproximaciones. Por ejemplo, $x = \sqrt{2}$ es una solución exacta de $x^2 = 2$, mientras $x = 1.414$ es una solución aproximada a la milésima más cercana.

Serie de problemas A

Encuentra las soluciones exactas de cada ecuación, si es posible, usando cualquier método.

1. $(x - 3)^2 = 36$

2. $(k - 1)^2 - 25 = 0$

3. $2(r - 7)^2 = 32$

4. $(a - 4)^2 + 2 = 0$

5. $2(b - 3)^2 + 5 = 55$

6. $3(2c + 5)^2 - 63 = 300$

7. $(x - 4)^2 = 3$

8. $2(r - 3)^2 = {}^-10$

9. $4(x + 2)^2 - 3 = 0$

10. Encuentra las soluciones aproximadas de las ecuaciones en los Problemas 7 y 9 a la milésima más cercana.

Para usar los métodos de solución demostrados en el ejemplo de la página 457, necesitas poder reconocer expresiones cuadráticas que puedan volverse a escribir como cuadrados perfectos. Trabajaste con este tipo de *trinomios cuadrados perfectos* en la última lección.

Serie de problemas B

1. ¿Cuáles de éstos son cuadrados perfectos?

a. $x^2 + 6x + 9$ **b.** $b^2 + 9$ **c.** $x^2 + 6x + 4$

d. $m^2 + 12m - 36$ **e.** $m^2 - 12m + 36$ **f.** $y^2 + y + \frac{1}{4}$

g. $r^2 - 16$ **h.** $1 + 2r + r^2$ **i.** $y^2 - 2y - 1$

2. ¿Cuáles de estos son cuadrados perfectos?

a. $4p^2 + 4p + 1$ **b.** $4q^2 + 4q + 4$ **c.** $4s^2 - 4s - 1$

d. $4t^2 - 4t + 1$ **e.** $4v^2 + 9$ **f.** $4w^2 + 12w + 9$

3. Describe cómo puedes determinar si una expresión es un cuadrado perfecto, sin factorizarla.

Supón que conoces los términos x^2 y x en una expresión cuadrática y quieres convertirla en un trinomio cuadrado perfecto al añadirle una constante. ¿Cómo puedes encontrar el término que falta?

EJEMPLO

Si $x^2 + 20x + \_\_\_$ es un cuadrado perfecto, entonces

$$x^2 + 20x + \_\_\_ = (x + ?)^2$$

Como el término medio de la expansión es el doble del producto del coeficiente de x y el término constante en el binomio ha sido elevado al cuadrado,

$$20 = (2)(1)(?)$$
$$10 = ?$$

Entonces, el cuadrado perfecto debe ser $(x + 10)^2$ ó $x^2 + 20x + 100$.

Datos de interés

La ecuación cuadrática $W = \frac{1}{2}kx^2$ describe la cantidad de trabajo (en una unidad llamada *joules*) necesaria para alargar un resorte x cm más allá de su longitud normal. El valor de k depende de la fuerza del resorte.

CONTENTS

Serie de problemas C

Completa cada expresión cuadrática para convertirla en un cuadrado perfecto. Después escribe la expresión completa en forma factorizada.

1. $x^2 - 18x + \_\_\_$

2. $x^2 + 22x + \_\_\_$

3. $k^2 - 3k + \_\_\_$

4. $25m^2 + 10m + \_\_\_$

5. $16r^2 - 8r \square \_\_\_$

6. $4z^2 - 12z \square \_\_\_$

Comparte & resume

1. ¿Por qué es útil buscar cuadrados perfectos en expresiones cuadráticas?

2. ¿Cómo puedes reconocer un trinomio cuadrado perfecto?

Investigación 2 Resuelve cuadráticas completando el cuadrado

En la Serie de problemas A, aprendiste que es fácil resolver una ecuación cuadrática con un cuadrado perfecto de un lado y una constante en el otro. También puedes resolver ecuaciones que tengan cuadrados perfectos con una constante sumada o restada. Se puede usar una técnica llamada *completar el cuadrado* para reodernar ecuaciones cuadráticas dentro de esta forma.

En la Serie de problemas C, encontraste que la constante debía sumarse para transformar una expresión cuadrática en un cuadrado perfecto. Con la misma idea, algunas expresiones que no son cuadrados perfectos se pueden volver a escribir como cuadrados perfectos con una constante sumada o restada.

EJEMPLO

$x^2 + 6x + 10$ no es un cuadrado perfecto. Para que $x^2 + 6x + \_\_\_$ sea un cuadrado perfecto la constante sumada debe ser 9, porque $x^2 + 6x + 9$ es un cuadrado perfecto. (¿Te das cuenta por qué?)

Esto quiere decir que $x^2 + 6x + 10$ es 1 más que un cuadrado perfecto. Podemos usar esto para volver a escribir la expresión como un cuadrado más 1:

$$\begin{aligned} x^2 + 6x + 10 &= (x^2 + 6x + 9) + 1 \\ &= (x + 3)^2 + 1 \end{aligned}$$

Serie de problemas D

Vuelve a escribir cada expresión como un cuadrado con una constante sumada o restada.

1. $x^2 + 6x + 15 = x^2 + 6x + 9 + \_\_\_ = (x + 3)^2 + \_\_\_$

2. $k^2 - 6k + 30 = k^2 - 6k + 9 + \_\_\_ = (k - 3)^2 + \_\_\_$

3. $s^2 + 6s - 1 = s^2 + 6s + 9 - \_\_\_ = (s + \_\_\_)^2 - \_\_\_$

4. $r^2 - 6r - 21 = r^2 - 6r + 9 \square \_\_\_ = (r \square \_\_\_)^2 \square \_\_\_$

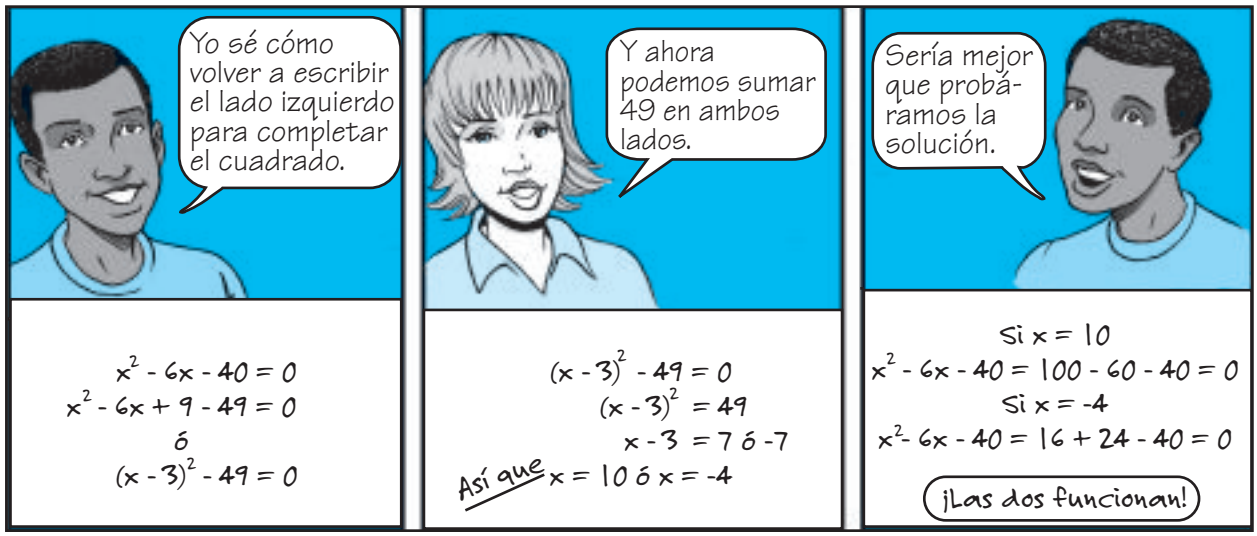
5. $m^2 + 12m + 30$

6. $h^2 - 5h$

7. $9r^2 + 18r - 20$

8. $9n^2 - 6n + 11$

Marcus y Lydia quieren resolver la ecuación $x^2 - 6x - 40 = 0$.


Yo sé cómo volver a escribir el lado izquierdo para completar el cuadrado.
$x^2 - 6x - 40 = 0$
$x^2 - 6x + 9 - 49 = 0$
ó
$(x - 3)^2 - 49 = 0$
Y ahora podemos sumar 49 en ambos lados.
$(x - 3)^2 - 49 = 0$
$(x - 3)^2 = 49$
$x - 3 = 7$ ó -7
Así que $x = 10$ ó $x = -4$
Sería mejor que probáramos la solución.
Si $x = 10$
$x^2 - 6x - 40 = 100 - 60 - 40 = 0$
Si $x = -4$
$x^2 - 6x - 40 = 16 + 24 - 40 = 0$
¡Las dos funcionan!

Este método de resolver ecuaciones se llama *completar el cuadrado.*

Serie de problemas E

Encuentra la solución exacta de cada ecuación completando el cuadrado.

1. $x^2 - 8x - 9 = 0$

2. $w^2 - 8w + 6 = 0$

3. $9m^2 + 6m - 8 = 0$

CONTENTS

¿Qué puedes hacer si el coeficiente de una variable al cuadrado no es un cuadrado? Una aproximación es hacer primero lo mismo en ambos lados para producir una ecuación equivalente con 1 (u otro número al cuadrado) como el coeficiente de una variable al cuadrado.

Serie de problemas F

1. Para resolver $2x^2 - 8x - 1 = 0$, puedes dividir ambos lados entre dos, lo que resulta en la ecuación equivalente $x^2 - 4x - \frac{1}{2} = 0$. Resuelve esta ecuación equivalente y completa la solución.

2. Usa el método del Problema 1 para resolver $2m^2 - 12m + 7 = 0$.

3. Considera la ecuación $18x^2 - 12x - 3 = 0$.

a. Trata de dividir la ecuación entre 18 para que el coeficiente de x^2 sea igual a 1.

b. Ahora piensa en el coeficiente 18. Encuentra otro número con el que puedas dividir 18 para obtener un cuadrado perfecto. Divide la ecuación entre ese número.

c. Usa tu respuesta de la Parte a o la Parte b para resolver la ecuación.

4. Explica por qué $x^2 + 64 = 16x$ tiene sólo una solución.

5. Explica por qué $g^2 - 4g + 11 = 0$ no tiene soluciones.

Comparte & resume

1. Proporciona un ejemplo de una ecuación cuadrática que no sea un cuadrado perfecto pero que sea fácil de resolver completando el cuadrado. Resuelve tu ecuación.

2. Supón que tienes una ecuación en la forma $y = ax^2 + bx + c$ para la que el coeficiente de x^2 no es un cuadrado perfecto. ¿Cómo puedes resolver la ecuación? Ilustra tu respuesta con un ejemplo.

Ejercicios por tu cuenta

Practica & aplica

Resuelve cada ecuación.

1. $(x + 3)^2 = 25$

2. $(r - 8)^2 + 3 = 52$

3. $(2m + 1)^2 - 4 = 117$

4. $3(x - 3)^2 = 30$

5. $^-2(y - 7)^2 + 4 = 0$

6. $4(2z + 3)^2 - 2 = ^-1$

Completa cada expresión cuadrática de manera que sea un cuadrado perfecto. Después escribe la expresión completa en forma factorizada.

7. $x^2 - 8x$ ☐ ___

8. $b^2 + 9b$ ☐ ___

9. $81d^2 - 90d$ ☐ ___

Vuelve a escribir cada expresión como un cuadrado con una constante sumada o restada.

10. $r^2 - 6r + 1 = r^2 - 6r + 9 +$ ___ $= (r$ ☐ ___$)^2 -$ ___

11. $r^2 + 6r + 6 = (r$ ☐ ___$)^2$ ☐ ___

12. $p^2 - 16p + 60$

13. $g^2 - 3g - 1$

14. $a^2 + 10a + 101$

15. $4x^2 + 4x + 2$

Resuelve cada ecuación completando el cuadrado.

16. $m^2 + 2m - 11 = 0$

17. $b^2 - 3b = 3b + 7$

18. $x^2 - 6x = ^-5$

19. $a^2 + 10a + 26 = 0$

20. $2x^2 + 4x - 1 = 0$

21. $2u^2 + 3u - 2 = 0$

Datos de interés

La aceleración, en m/s^2, de un ciclista que desciende una colina podría darse por la ecuación cuadrática $a = 0.12 - 0.0006v^2$, donde v es la velocidad de la bicicleta en m/s.

Conecta & amplía

22. Stephen, Consuela y Kwame crearon un acertijo numérico, cada uno, para su maestro, el Sr. Karnowski.

- Stephen dice, "Estoy pensando en un número. Si le resta 1 a mi número, eleva al cuadrado el resultado y le suma 5, obtendrá 4".
- Consuela dice, "Estoy pensando en un número. Si le resta 1 a mi número, eleva al cuadrado el resultado y le suma 1, obtendrá 1".
- Kwame dice, "Estoy pensando en un número. Si duplica el número, le resta 5, eleva al cuadrado el resultado y le suma 1, obtendrá 10".

Después de pensar en estos acertijos, el Sr. Karnowski dijo, "Uno de sus acertijos tiene una solución, uno de ellos tiene dos soluciones y otro no tiene solución".

¿Qué acertijo es cuál? Escribe una ecuación para cada acertijo y explica tu respuesta.

23. **Deportes** Brianna y Lucita están jugando tenis. En un voleo, la altura de la bola *h,* en pies, podría describirse con la siguiente ecuación, donde *t* es el tiempo en segundos desde el momento en que Brianna golpeó la pelota:

$$h = {}^{-}16(t - 1)^2 + 20$$

Asume que Lucita dejará que la pelota rebote una vez, ¿cuándo golpeará el suelo? Escribe y resuelve una ecuación como ayuda para que respondas esta pregunta. Da tu respuesta a la centésima de segundo más cercana.

24. Cuando empiezas el proceso para completar el cuadrado de una ecuación, debes poder decir, sin resolverla, si la ecuación tiene solución.

a. Expresa cada una de estas con un cuadrado perfecto más una constante. Sin resolverla, decide si la ecuación tiene una solución y explica tu respuesta.

i. $x^2 + 6x + 15 = 0$

ii. $x^2 + 6x + 5 = 0$

b. Enuncia una regla para determinar si una ecuación de la forma $(x + a)^2 + c = 0$ tiene soluciones. Explica tu regla.

25. Geometría Una pintura rectangular tiene una área de 25 metros cuadrados. Uno de los lados es 2 pies más largo que el otro.

a. Rápidamente estima valores aproximados para las longitudes laterales de la pintura. ¿Tus estimaciones te proporcionaron un área que era demasiado grande o demasiado pequeña?

b. Escribe una ecuación que relacione los lados y el área de la pintura y resuélvela con precisión completando el cuadrado.

c. Compara tu respuesta de la Parte b con tu aproximación de la Parte a.

26. Historia Cuando el famoso matemático alemán Gauss era niño, sorprendió a su maestra al calcular rápidamente la suma de los enteros del 1 al 100. Él se percató de que podría calcular la suma sin sumar todos los números, sólo agrupando los 100 números en pares.

Para que veas un atajo en el cálculo de esta suma, observa las dos listas del 1 al 100, con una en orden inverso.

1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**...**	**50**	**...**	**94**	**95**	**96**	**97**	**98**	**99**	**100**
100	**99**	**98**	**97**	**96**	**95**	**94**	**...**	**51**	**...**	**7**	**6**	**5**	**4**	**3**	**2**	**1**

a. ¿Cuál es la suma de cada par?

b. ¿Cuántos pares hay?

c. ¿Cuál es la suma de todos estos pares?

d. ¿Cuántas veces se cuenta cada uno de los enteros del 1 al 100 en esta suma?

e. Considera tus respuestas de las Partes c y d. ¿Cuál es la suma de los enteros del 1 al 100?

f. Explica cómo puedes usar este mismo razonamiento para encontrar la suma de los enteros de 1 a n para cualquier valor de n. Escribe una fórmula para s, la suma de los primeros enteros positivos n.

g. Chloe sumó varios números consecutivos empezando desde el 1 y encontró una suma de 91. Escribe una ecuación que puedas usar para encontrar los números que sumó. Resuelve tu ecuación completando el cuadrado. Verifica tu respuesta con la fórmula.

En tus propias palabras

¿Por qué los cuadrados perfectos son útiles para resolver ecuaciones cuadráticas?

Repaso mixto

Identifica los valores de a, b y c en cada ecuación, reodernándolos en la forma de la ecuación cuadrática general, $ax^2 + bx + c = 0$.

27. $2x^2 - 7x = {}^-5$

28. $8a + 2 = 9a^2$

29. $4.5k^2 + 3k = {}^-3 + k + k^2$

30. ${}^-m - 2 = m^2 - m - 3$

31. $4 = {}^-p^2$

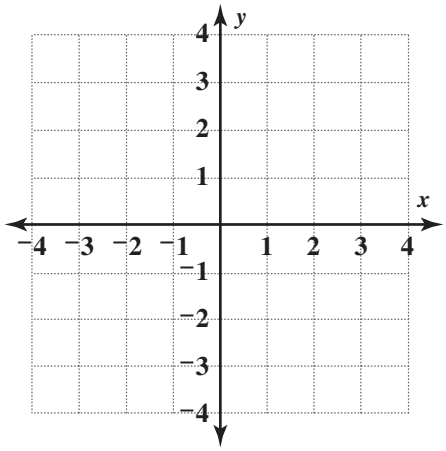
32. $7 - w^2 = w + 2.5w^2$

Grafica cada desigualdad en una cuadrícula separada como la que se muestra.

33. $y \geq x - 3$

34. $y < 3 - x$

35. $y \leq 1.5x + 3$



36. Geometría Relaciona cada sólido con su nombre. (Ayuda: En aquéllos en los que estés inseguro, piensa qué significa su término.)

a. pirámide cuadrada

b. cono

c. cilindro

d. prisma triangular

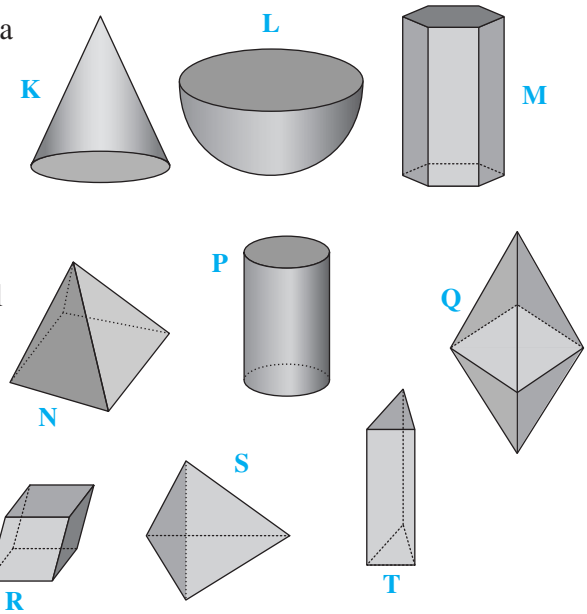
e. prisma oblicuo

f. prisma hexagonal

g. octaedro

h. tetraedro

i. semiesfera



7.4 La fórmula cuadrática

Has visto que algunas ecuaciones cuadráticas son más fáciles de resolver que otras. Algunas se pueden resolver rápidamente factorizando o sacando la raíz cuadrada en ambos lados. Cualquier ecuación cuadrática se puede resolver completando el cuadrado, pero no siempre es evidente lo que debe hacerse.

Vuelve a observar el proceso de resolver una ecuación completando el cuadrado. La ecuación cuadrática general

$$ax^2 + bx + c = 0$$

se resuelve a continuación completando el cuadrado. Para que puedas ver cada paso más fácilmente, a un lado de la ecuación general, se resuelve una ecuación cuadrática específica.

Ecuación general	**Ecuación específica**
$ax^2 + bx + c = 0$	$2x^2 + 8x + \frac{1}{2} = 0$
Paso 1: Divide entre a.	
$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$	$x^2 + 4x + \frac{1}{4} = 0$
Paso 2: Completa el cuadrado.	
$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a} - \frac{b^2}{4a^2} = 0$	$x^2 + 4x + 4 + \frac{1}{4} - 4 = 0$
Paso 3: Reoderna.	
$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} = \frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}$	$x^2 + 4x + 4 = \frac{15}{4}$
$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$	$(x + 2)^2 = \frac{15}{4}$
Paso 4: Saca la raíz cuadrada de ambos lados.	
$x + \frac{b}{2a} = \frac{\pm\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$	$x + 2 = \pm\frac{\sqrt{15}}{2}$
Paso 5: Resta la constante sumada a x.	
$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$	$x = -2 \pm \frac{\sqrt{15}}{2}$

CONTENTS

A principios del siglo XVII, matemáticos de la India resolvieron ecuaciones cuadráticas completando el cuadrado y escribiendo la fórmula cuadrática.

Este proceso proporciona una fórmula que puede usarse para encontrar las soluciones de cualquier ecuación cuadrática.

La fórmula cuadrática

Las soluciones de $ax^2 + bx + c = 0$ son

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Es decir las soluciones son

$$x = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad \text{y} \quad x = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Piensa & comenta

Usa la fórmula cuadrática para resolver esta ecuación.

$$x^2 + 3x - 5 = 0$$

Ahora resuelve la ecuación completando el cuadrado. ¿Te dio el mismo resultado? ¿Qué método te parece más sencillo?

Investigación 1 Usa la fórmula cuadrática

Esta investigación te ayudará a aprender a usar la fórmula cuadrática.

Serie de problemas A

Haz lo siguiente para los Problemas 1 al 8:

- Identifica los valores de a, b y c que se refieren en la fórmula cuadrática. Vuelve a escribir la ecuación en la forma $ax^2 + bx + c = 0$.
- Resuelve la ecuación con la fórmula cuadrática.

1. $2x^2 + 3x = 0$

2. $7x^2 + x - 3 = 0$

3. $3 - x^2 + 2x = 0$

4. $6x + 2 = x^2$

5. $2x^2 = x - 5$

6. $x^2 - 12 = 0$

7. $x^2 = 5x$

8. $x(x - 6) = 3$

9. Considera la ecuación $x^2 + 3x + 2 = 0$.

a. Resuelve la ecuación con factorización.

b. Ahora usa la fórmula cuadrática para resolver la ecuación.

c. ¿Qué método te parece más fácil?

d. ¿Cuál de los Problemas 1 al 8 podrías resolver con factorización?

Serie de problemas B

Haz lo siguiente para cada problema:

- Resuelve la ecuación con cualquier método que te guste. Verifica tus respuestas.
- Si no resolviste la ecuación con factorización, decide si podrías haber usado factorización para resolverla.

1. $x^2 - 5x + 6 = 0$

2. $w^2 - 6w + 9 = 0$

3. $t^2 + 4t + 1 = 0$

4. $x^2 - x + 2 = 0$

5. $k^2 + 4k + 2 = 0$

6. $3g^2 - 2g - 2 = 0$

7. $z^2 - 12z + 36 = 0$

8. $2e^2 + 7e + 6 = 0$

9. $x^2 + x = 15 - x$

10. $3n^2 + 14 = 8n^2 + 3n$

Comparte & resume

1. ¿Cuál es la relación entre la fórmula cuadrática y el proceso de completar el cuadrado?

2. Has aprendido varios métodos para resolver ecuaciones cuadráticas: la vuelta atrás, factorización, completar el cuadrado y la fórmula cuadrática.

a. ¿Cuál de éstos sólo puede usarse en algunas ecuaciones cuadráticas?

b. ¿Cuál de éstos se puede usar en todas las ecuaciones cuadráticas?

3. Cuando se te da una ecuación cuadrática para resolver, ¿cómo seleccionas un método para resolverla?

Investigación 2 Aplica la fórmula cuadrática

En el Capítulo 4, examinaste ecuaciones cuadráticas en situaciones específicas y estimaste soluciones usando la calculadora graficadora. Ahora vas a aplicar la fórmula cuadrática para resolverlas con exactitud.

Serie de problemas C

En algunos de estos problemas, la fórmula cuadrática dará dos soluciones. Asegúrate de que tus respuestas sean lógicas en el contexto del problema.

1. Josefina, que hace tapices, tiene un cliente que quiere un tapiz con un área de 4 metros cuadrados. Josefina decide que tendrá forma rectangular y longitud de 1 metro más de largo que de ancho.

a. Escribe una ecuación para representar los requerimientos del cliente y la decisión de Josefina.

b. Usa la fórmula cuadrática para calcular el ancho y el largo del tapiz. Expresa tu respuesta de dos formas, exacta y al centímetro más cercano.

2. Otro cliente quiere un tapiz rectangular con un área de 6 m^2, pero ella insiste en que la longitud sea exactamente 2 metros más que el ancho.

Escribe y resuelve una ecuación que represente esta situación. Da las dimensiones exactas del tapiz y después estima las dimensiones al centímetro más cercano.

3. Jesse lanzó una súper bola al suelo y ésta rebotó en línea recta hacia arriba con una velocidad inicial de 30 pies por segundo. La fórmula $h = 30t - 16t^2$ proporciona la altura h, en pies, t segundos después de que la pelota se alejó del suelo. Escribe y resuelve una ecuación para encontrar el valor de t cuando la pelota vuelve a golpear el suelo.

Recuerda

Las ecuaciones de movimiento como $h = 30t - 16t^2$ y $h = {}^{-}16t^2 + 20$ sólo dan estimaciones de las posiciones de los objetos porque ignoran la resistencia del aire.

4. Cuando se lanza un objeto hacia arriba en línea recta, su altura h en pies después de t segundos se puede estimar con la fórmula $h = s + vt - 16t^2$, donde s es la altura inicial (a $t = 0$) y v es la velocidad inicial. En el Problema 3, s era 0 pies y v era 30 pies por segundo, de manera que la altura de la pelota se estimó en $h = 30t - 16t^2$.

Supón que Jesse lanzó la pelota hacia arriba en lugar de rebotarla, de manera que la altura de la pelota cuando $t = 0$ era 5 pies arriba del suelo pero la velocidad inicial seguía siendo 30 pies/s.

a. Escribe una ecuación que describa la altura h de la pelota de Jesse después de t segundos.

b. Escribe y resuelve una ecuación para calcular cuánto tardará la pelota en tocar el suelo.

5. Si se deja caer un objeto con una velocidad inicial 0, su altura se puede aproximar al sumar su altura inicial más ${}^{-}16t^2$, que representa el efecto de gravedad. Por ejemplo, la altura de una roca que se deja caer de 20 pies sobre el nivel del suelo se puede aproximar con la fórmula $h = {}^{-}16t^2 + 20$.

Escribe y resuelve una ecuación para determinar cuántos segundos tardará en golpear el suelo una roca que se deja caer desde 100 pies sobre el nivel del suelo.

Serie de problemas D

El pueblo de Seaside, que ahora sólo tiene pocos y pequeños hoteles, está considerando otorgar permiso para la construcción de un centro turístico grande a lo largo la costa. Algunos residentes están a favor del plan porque traerá ingresos a la comunidad. Otros están en contra. Dicen que desestabilizará su estilo de vida. El consejo estatal de turismo tiene una fórmula para calcular la clasificación turística, T, de un área basándose en dos factores: U, una clasificación de singularidad y A, la clasificación de comodidad.

1. La clasificación de comodidad, A, se usa para evaluar el grado de atractivo de un destino turístico, incluyendo lo fácil que es encontrar un lugar para quedarse. Seaside actualmente tiene una clasificación de 5. Se estima que por cada 100 camas que el centro turístico abra para los turistas, A aumentará en 2 puntos.

Si el centro turístico tiene p cientos de camas, ¿cuál es el estimado para la nueva clasificación de comodidad?

2. La escala de clasificación de singularidad, U, se usa para evaluar las características especiales que atraerán a los turistas. Seaside actualmente tiene una clasificación de singularidad alta, 20, porque a menudo se observan delfines cerca de las playas locales. Un comité ha recopilado evidencias de que un aumento de turistas evitará que los delfines se acerquen a la costa. Ellos estiman que por cada 100 camas que abra el centro turístico, U caerá 2 puntos.

Si el centro turístico tiene p cientos de camas, ¿cuál es el estimado para la nueva clasificación de singularidad?

3. La clasificación total de turismo, T, se calcula al multiplicar A y U.

a. ¿Cuál es la clasificación de turismo actual del pueblo?

b. Escribe una expresión en términos de p para la clasificación estimada de turismo si se añaden p cientos de camas.

c. Usa tu expresión para la Parte b para decidir para qué valores de p no habría cambio en la clasificación de turismo. (Ayuda: Escribe y resuelve una ecuación.)

d. ¿Para qué número de camas el centro turístico causará una disminución en la clasificación de turismo?

e. El consejo del pueblo de Seaside cree que la alteración del estilo de vida del pueblo no puede justificarse a menos que el desarrollo resultara en un aumento en la clasificación de turismo de al menos 140 puntos.

i. Usa tu expresión de la Parte b para decidir para qué valores de p esperarías lograr una clasificación de turismo de 140 puntos.

ii. ¿Qué valores de p darán una clasificación de turismo *por encima* de los 140 puntos?

f. ¿Qué recomendarías que hiciera el consejo?

Comparte & resume

Explica los pasos implicados en usar una fórmula cuadrática para resolver una ecuación.

Investigación 3 ¿Qué te indica $b^2 - 4ac$?

Recuerda

La fórmula cuadrática es $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$.

En algunas situaciones, quizá estés más interesado en saber *cuántas* soluciones tiene una ecuación cuadrática que en cuáles son las soluciones *exactas*. Por ejemplo, supón que estás pensando en la altura a la que llega una pelota, en diferentes momentos, después de haberla lanzado. Podrías resolver una ecuación cuadrática para calcular el momento en que la pelota alcanza cierta altura. Pero si sólo quieres saber *si* alcanzó la altura y no te interesa saber *cuándo,* la pregunta que quieres contestar es

¿Tiene esta ecuación alguna solución?

Sólo necesitas una parte de la fórmula cuadrática, la expresión $b^2 - 4ac$, para responder esta pregunta.

Piensa & comenta

Has visto ejemplos de ecuaciones cuadráticas que no tienen soluciones. Algunas veces, esto es fácil de determinar sin usar la fórmula cuadrática. Da un ejemplo de este tipo de ecuaciones y explica cómo sabes que no tienen soluciones.

Algunas ecuaciones cuadráticas tienen exactamente una solución. Da algunos ejemplos.

Claro que muchas ecuaciones cuadráticas tienen dos soluciones. Da un ejemplo.

Serie de problemas E

Ahora vas a investigar la relación entre el valor de $b^2 - 4ac$ y el número de soluciones de $ax^2 + bx + c = 0$.

1. La ecuación $x^2 + 1 = 0$ no tiene soluciones.

a. Explica por qué es verdad esto.

b. ¿Cuál es el valor de $b^2 - 4ac$ para esta ecuación? ¿Es positivo, negativo ó 0?

c. Da otro ejemplo de otra ecuación cuadrática que sepas que no tiene soluciones. Encuentra el valor de $b^2 - 4ac$ para tu ejemplo: ¿es positivo, negativo ó 0?

2. La ecuación $(x - 3)(x + 5) = 0$ tiene dos soluciones.

a. Expresa esta ecuación en la forma $ax^2 + bx + c = 0$ y encuentra el valor de $b^2 - 4ac$. ¿Es positivo, negativo ó 0?

b. Da otro ejemplo de una ecuación cuadrática con dos soluciones. Encuentra el valor de $b^2 - 4ac$ para tu ecuación.

3. La expresión $x^2 + 2x + 1$ es un trinomio cuadrado perfecto ya que es igual a $(x + 1)^2$. La ecuación $x^2 + 2x + 1 = 0$ tiene una solución.

a. El valor de $b^2 - 4ac$ para esta ecuación, ¿es positivo, negativo ó 0?

b. Da otro ejemplo de una ecuación cuadrática con una solución. El valor de $b^2 - 4ac$ para tu ecuación, ¿es positivo, negativo ó 0?

4. Como ya sabes, una ecuación cuadrática puede tener cero, una o dos soluciones. Este problema te ayudará a explicar la relación entre el valor de $b^2 - 4ac$ y el número de soluciones que tiene una ecuación.

a. ¿En dónde ocurre la expresión $b^2 - 4ac$ dentro de la fórmula cuadrática?

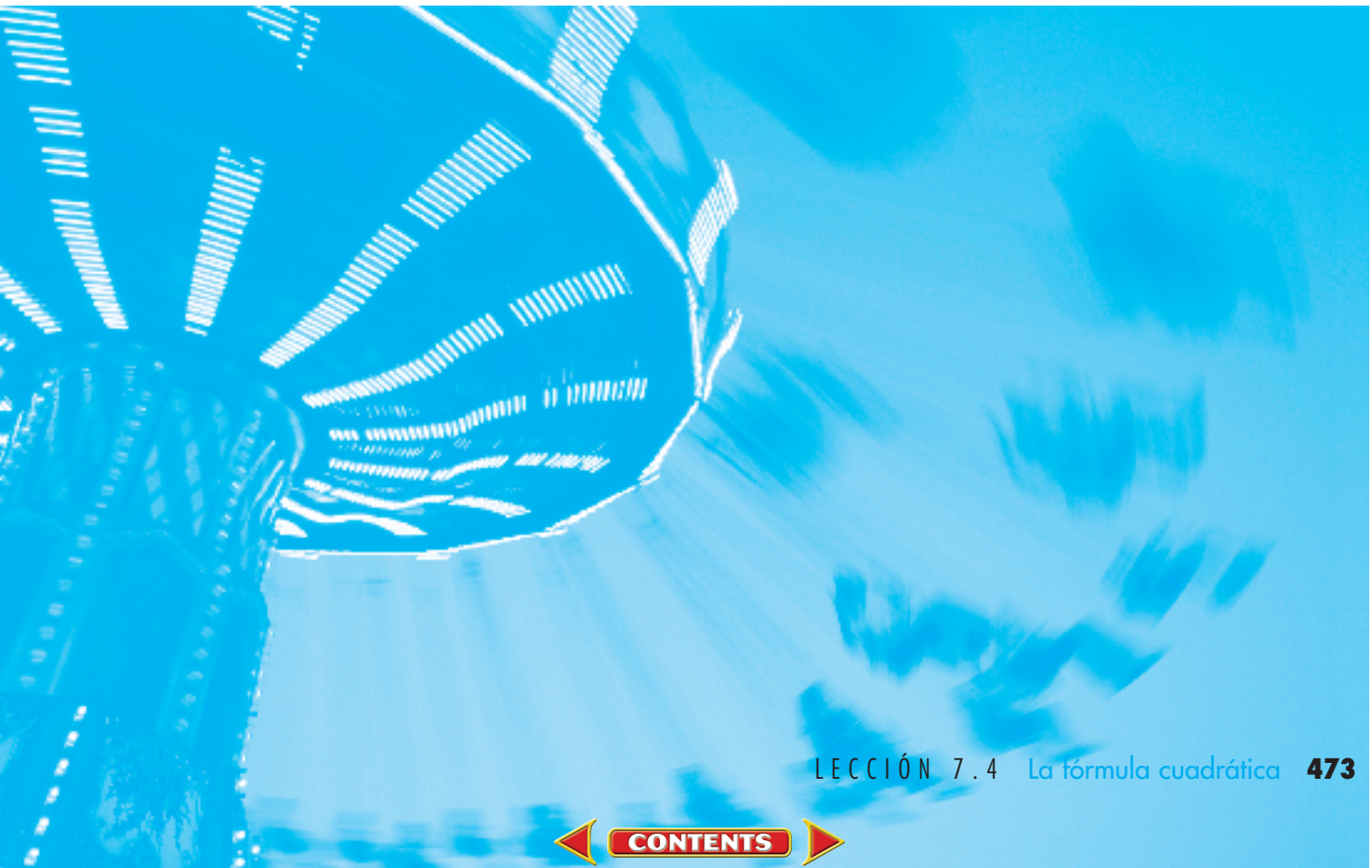
b. ¿Qué valor o valores debe tener $b^2 - 4ac$ para que la fórmula cuadrática no tenga soluciones? Explica.

c. ¿Qué valor o valores debe tener $b^2 - 4ac$ para que la fórmula cuadrática tenga una solución? Explica.

d. ¿Qué valor o valores debe tener $b^2 - 4ac$ para que la fórmula cuadrática tenga dos soluciones? Explica.

Datos de interés

La aceleración de los pasajeros en este juego mecánico podría calcularse con la ecuación cuadrática $a = 0.2v^2$, donde a es la aceleración hacia el centro del juego mecánico en m/s^2 y v es la velocidad en m/s.



Serie de problemas F

Encuentra el número de soluciones que tiene cada ecuación.

1. $2x^2 - 9x + 5 = 0$

2. $3x^2 - 7x + 9 = 0$

En la Serie de problemas C, Jesse rebotó una súper pelota con una velocidad de 30 pies por segundo cuando se alejaba del suelo. La fórmula $h = 30t - 16t^2$ proporciona la altura de la pelota, donde t es el tiempo en segundos desde el momento en que la pelota se aleja del suelo.

3. Puedes usar lo que sabes sobre la fórmula cuadrática para calcular la altura a la que viajará la pelota. Primero observa si la pelota alcanzará los 100 pies.

a. ¿Qué ecuación resolverías para saber si la pelota alcanzó los 100 pies y cuándo lo hizo?

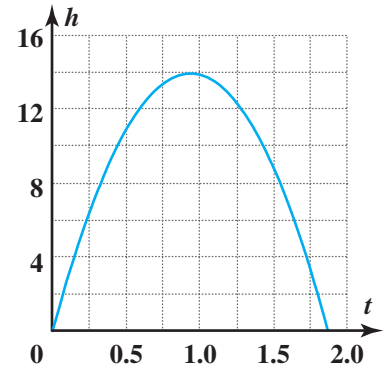
b. Escribe tu ecuación en la forma $at^2 + bt + c = 0$.

c. ¿Cuál es el valor de $b^2 - 4ac$ para tu ecuación?

d. ¿Alcanzará la pelota los 100 pies? Explica.

4. **Reto** Esta gráfica de $h = 30t - 16t^2$ puede ayudarte a determinar hasta dónde llegará la pelota.

Altura de rebote de la súper pelota



a. Supón que M es la altura máxima que alcanza la pelota. Escribe una ecuación que represente el momento en que la pelota está a esta altura.

b. Escribe tu ecuación en la forma $at^2 + bt + c = 0$.

c. ¿Cuántas soluciones tendrá esta ecuación?
Ayuda: Observa la gráfica.

d. ¿Qué sabes acerca del valor de $b^2 - 4ac$ para una ecuación cuadrática con el número de soluciones que esta ecuación tiene?

e. Usa tu respuesta de la Parte d como ayuda para encontrar el valor de M. Muestra cómo encontraste tu respuesta.

f. ¿A qué altura viajó la pelota?

g. Escribe y resuelve una ecuación para saber cuánto tardó la pelota en llegar a esta altura.

CONTENTS

Comparte & resume

1. Sin realmente resolverla, ¿cómo puedes saber si una ecuación cuadrática tiene una o dos soluciones o no tiene ninguna solución?
2. En una relación cuadrática en la forma $y = ax^2 + bx + c$ ¿cómo puedes saber si y alguna vez tiene un cierto valor d?

Investigación de laboratorio

La razón áurea

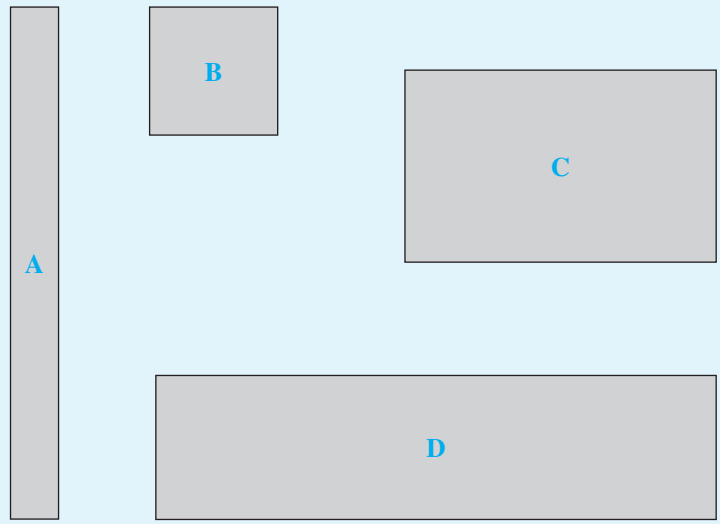
MATERIALES

- regla
- papel cuadriculado (opcional)

En esta investigación, vas a trabajar con una razón que ha sido muy importante desde los antiguos griegos. Sorprendentemente, la razón se presenta en muchos lugares, incluyendo las matemáticas, el arte, la música, la arquitectura y la genética.

¿Qué te gusta?

1. Estos son algunos rectángulos ¿Cuál crees que es el más "atractivo visualmente"? (No necesitas razones para contestar; sólo di cuál te gusta.)



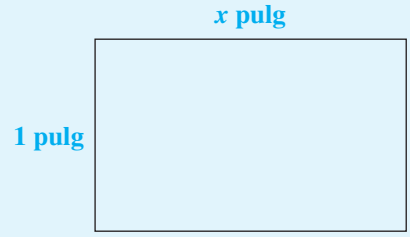
2. Dibuja algunos otros rectángulos que tengan formas que te agraden. Explica por qué crees que una forma es más agradable que otra.

Muchas personas piensan que el Rectángulo C (y los rectángulos geométricamente similares a él) es el más agradable visualmente. Se llama *rectángulo áureo* y la razón de sus lados (la razón de su lado largo a su lado corto) es la *razón áurea.*

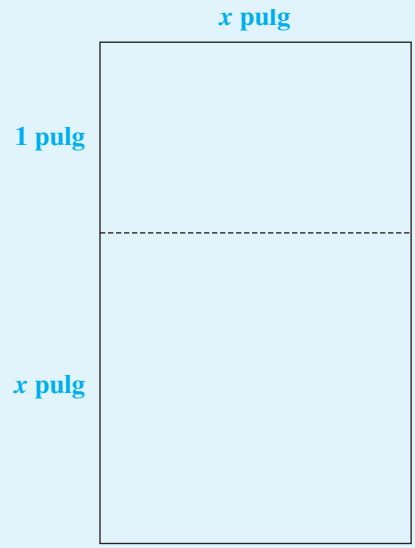
Recuerda

En las figuras semejantes los lados correspondientes tienen longitudes que comparten una razón común y los ángulos correspondientes son congruentes.

Una propiedad especial de un rectángulo áureo es, que cuando le añaden un cuadrado a su lado más largo, de manera que forme un nuevo rectángulo, la forma nueva es similar a la original. Entonces, el nuevo rectángulo es un rectángulo áureo y sus lados están en la razón áurea.



$$\text{Razón áurea} = \frac{\text{lado largo}}{\text{lado corto}} = \frac{x}{1}$$



$$\text{Razón áurea} = \frac{\text{lado largo}}{\text{lado corto}} = \frac{x+1}{x}$$

Pruébalo

3. Mide las dimensiones de los dos rectángulos anteriores y determina si tienen la misma razón $\frac{\text{lado largo}}{\text{lado corto}}$. ¿Cuál es la razón?

4. Ahora encuentra la razón $\frac{\text{lado largo}}{\text{lado corto}}$ de cada rectángulo que dibujaste en el Problema 2.

Resuélvelo

5. Las razones de los dos rectángulos anteriores deben ser iguales. Escribe una ecuación que presente las razones iguales entre sí. Es decir, completa esta ecuación:

$$\frac{x}{1} = \text{———}$$

6. Ahora escribe tu ecuación en la forma $ax^2 + bx + c = 0$. (Ayuda: Necesitarás pensar cómo sacar x del denominador.)

7. Encuentra la solución exacta de tu ecuación y después expresa la solución a la milésima más cercana.

8. ¿Son lógicas tus dos soluciones? Explica.

9. ¿Cuál es el valor de la razón áurea?

CONTENTS

10. Compara el valor de la razón áurea con las razones que mediste en la Pregunta 3. ¿Qué observas?

11. Ahora compara los valores de la razón áurea de las medidas que hiciste en tus propios rectángulos de la Pregunta 4. ¿Qué observas?

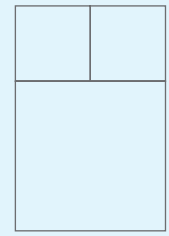
Un paso más

12. Con papel para graficar o papel ordinario y una regla, puedes dibujar un rectángulo que casi sea un rectángulo áureo.

a. *Paso 1:* En la esquina superior izquierda de la página, empieza con un cuadrado con lados de una unidad de longitud. ¿Cuál es la razón de los lados?

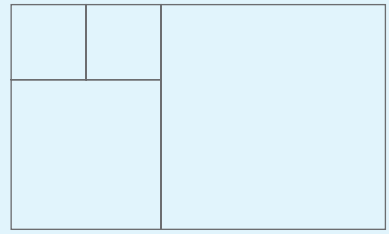
b. *Paso 2:* Añade otro cuadrado contiguo al primero para formar un rectángulo más grande. ¿Cuál es la razón de los lados de este nuevo rectángulo?

c. *Paso 3:* Añade un cuadrado contiguo al lado más largo del rectángulo para construir un rectángulo aún más grande. ¿Cuál es la razón $\frac{\text{lado largo}}{\text{lado corto}}$ de este nuevo rectángulo?

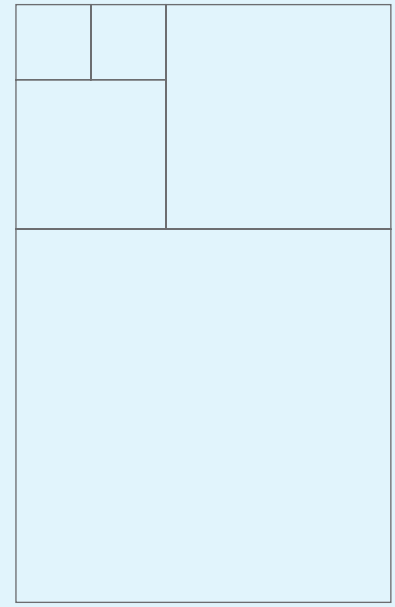


d. En tu papel, repite el Paso 3 tantas veces como puedas. ¿Cuál es la razón para el rectángulo final que hiciste? Compara este valor con la razón áurea que calculaste en el Problema 9.

Paso 4



Paso 5



13. Observa las dimensiones de los rectángulos que hiciste en el Problema 11.

- El primero es 1×1.
- Los siguientes cuatro son 1×2, 2×3, 3×5 y 5×8.
- Enumera sólo las más pequeñas dimensiones en cada rectángulo dada la *sucesión de Fibonacci:*

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, \ldots .$$

Busca un patrón en la sucesión de Fibonacci. ¿Cuáles son los dos siguientes números? ¿Cómo los encontraste?

14. Calcula la sucesión de razones de los números Fibonacci hasta la razón $\frac{\text{décimo número Fibonacci}}{\text{noveno número Fibonacci}}$ o $\frac{F_{10}}{F_9}$. Se calculan las dos primeras a continuación.

$$\frac{F_2}{F_1} = \frac{1}{1} = 1 \qquad \frac{F_3}{F_2} = \frac{2}{1} = 2$$

15. Compara las razones de la razón áurea. ¿Qué observas?

Descubre más

16. La razón áurea y los números Fibonacci aparecen en muchos contextos, tanto dentro como fuera de las matemáticas. Por ejemplo, las piñas tienen escamas en grupos de 8, 13 y 21 hileras.

Busca las respuestas de algunas de estas preguntas en la biblioteca o en Internet.

- ¿Cómo se hacen presentes dentro de la naturaleza la razón áurea y la sucesión de Fibonacci?
- ¿Cómo usaron Leonardo da Vinci y otros artistas la razón áurea?
- ¿Cómo se aplica la razón áurea en la arquitectura?
- ¿Cómo se usa la razón áurea en la música?

Datos de interés

La sucesión de Fibonacci fue nombrada en honor a su descubridor, Leonardo Fibonacci (también conocido como Leonardo Pisano), quien nació en 1170 d.C. en la ciudad de Pisa (Italia). Él fue una de las primeras personas en introducir, en Europa, el sistema numérico hindú-arábico, que usa los dígitos del 0 al 9 y un punto decimal.

Ejercicios por tu cuenta

Practica & aplica

Resuelve cada ecuación con la fórmula cuadrática, si es posible.

1. $2x^2 + 5x = 0$

2. $5x^2 + 7x + 4 = 0$

3. $c^2 - 10 = 0$

4. $b^2 + 10 = 0$

5. Resuelve la ecuación $9x^2 - 16 = 0$ con factorización y con la fórmula cuadrática.

6. **Geometría** El área de una fotografía es 320 centímetros cuadrados. Su longitud es 2 cm más que el doble de su ancho. Escribe y resuelve una ecuación para encontrar sus dimensiones.

7. **Ciencia física** Supón que, en algún punto durante el vuelo de un cohete, la altura h en metros, sobre el nivel del mar t segundos después de haber despegado depende de t de acuerdo con la fórmula $h = 2t(60 - t)$.

a. ¿En cuántos segundos después de haber despegado, el cohete regresará al nivel del mar?

b. Escribe y resuelve una ecuación para encontrar el momento en que el cohete estará a 1,200 m sobre el nivel del mar.

Encuentra el número de soluciones para cada ecuación cuadrática sin realmente resolver la ecuación. Explica cómo sabes que tus respuestas son correctas.

8. $x^2 + 2x + 3 = 0$ **9.** $x^2 - 2x - 3 = 0$ **10.** $9x^2 + 12x + 4 = 0$

11. Se lanza una pelota en línea recta hacia arriba con una velocidad inicial de 40 pies por segundo desde 5 pies sobre el nivel del suelo. $h = 40t - 16t^2 + 5$ es la ecuación que describe la altura h de la pelota después de t segundos.

a. ¿Alcanzará la pelota una altura de 100 pies? Explica.

b. ¿Alcanzará una altura de 15 pies? Explica.

c. **Reto** Encuentra la altura máxima de la pelota.

Conecta & amplía

12. Cuando Lourdes resolvió la ecuación $2x^2 - 13x = 24$, se sorprendió al encontrar que las soluciones eran exactamente 8 y $^-1.5$. Ben dijo que creía que esto significaba que la ecuación podía haberse resuelto por factorización.

a. Escribe una ecuación cuadrática en forma factorizada que tenga las soluciones 8 y $^-1.5$.

b. Desarrolla las factorizaciones para escribir una ecuación sin paréntesis. ¿Estaba Ben en lo correcto? (Ayuda: Si tu ecuación contiene una fracción, intenta multiplicarla por su denominador para obtener como coeficiente sólo enteros.)

c. Escribe una ventaja y una desventaja de usar la fórmula cuadrática para resolver la ecuación $2x^2 - 13x = 24$.

13. Considera la ecuación $3x + \frac{1}{x} = 4$.

a. ¿Ves algunas soluciones evidentes para esta ecuación?

b. Ahora resuelve la ecuación con la fórmula cuadrática. (Ayuda: Primero escribe una ecuación cuadrática equivalente.) Verifica tus soluciones en la ecuación original.

Reto Aunque estas ecuaciones no sean cuadráticas, la fórmula cuadrática puede ayudarte a resolverlas. Trata de resolverlas y explica tu razonamiento.

14. $(x^2 - 2x - 2)^2 = 0$

15. $x^3 - 2x^2 - 2x = 0$

16. Historia Este es un problema planteado por el matemático hindú Bhaskara en el sigo XII:*

La octava parte, al cuadrado, de una tribu de monos, estaba saltando en el campo y deleitándose con su ejercicio. Los doce monos restantes podían verse en la colina, entretenidos con su charla. ¿Cuántos eran en total?

Es decir, toma $\frac{1}{8}$ del tropel completo y eleva al cuadrado el resultado. Ese número de monos, junto con los doce en la colina, forman el tropel completo. ¿Cuántos monos hay en el tropel? Muestra tu trabajo.

*Fuente: Victor Katz. *A History of Mathematics: An Introduction.* Reading, Mass.: Addison-Wesley, 1998.

En tus propias palabras

Describe la relación entre la gráfica de $y = ax^2 + bx + c$ y las soluciones de la ecuación $ax^2 + bx + c = d$. Si la ecuación $ax^2 + bx + c = d$ no tiene soluciones, ¿qué nos indica sobre la gráfica?

17. En el Capítulo 4, resolviste desigualdades que presentaban relaciones lineales. Para este problema, usa las mismas ideas para resolver desigualdades que involucran relaciones cuadráticas.

a. Primero usa la fórmula cuadrática para resolver $x^2 - 3x - 7 = 0$.

b. Usa la información de la Parte a como ayuda para graficar $y = x^2 - 3x - 7$. Traza algunos puntos adicionales.

Usa tus soluciones y gráficas para resolver cada desigualdad.

c. $x^2 - 3x - 7 < 0$

d. $x^2 - 3x \geq 7$

e. $x^2 - 3x \leq 7$

18. Considera la relación cuadrática $y = x(x - 1)$.

a. ¿Para qué valores de x es $y = 0$?

b. Para los valores de x entre los que enumeraste en la Parte a, ¿es y positiva o negativa?

c. ¿Puede alguna vez y ser igual a $^-1$? Explica.

d. ¿Puede alguna vez y ser igual a 1? Explica.

e. Bosqueja una gráfica de esta relación.

f. **Reto** Con lo que sabes de la fórmula cuadrática y de tu gráfica, encuentra el valor *mínimo* de y.

19. **Reto** Quizá hayas resuelto este problema en el Capítulo 4. Ahora puedes usar lo que sabes de la fórmula cuadrática para resolverlo de otra manera.

Jermaine quiere construir un marco grande con una tira de madera de 20 pies.

a. Expresa la altura y el área del marco en términos de su ancho.

b. Bosqueja una gráfica de la relación entre el área y el ancho. ¿Hay un área máxima o mínima?

c. Usa la fórmula cuadrática para encontrar el área mínima o máxima del marco de Jermaine. Explica cómo encontraste tu respuesta.

d. ¿Qué dimensiones dan esta área?

Repaso mixto

Escribe una ecuación para representar los valores de B en términos de r.

20.

r	B
0	3
1	0.6
2	0.12
3	0.024
4	0.0048

21.

r	B
0	12
1	4.8
2	1.92
3	0.768
4	0.3072

En los Ejercicios 22 y 23, escribe una ecuación para representar la situación.

22. Economía el saldo b en una cuenta de ahorros al final de cualquier año t si se depositan \$5,000 inicialmente y la cuenta gana 8% de interés por año

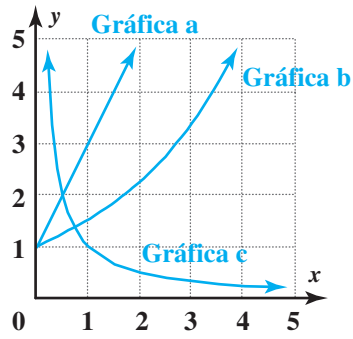
23. Ciencia biológica el número de bacterias b que quedan en una muestra después de 24 horas si un dieciseisavo del resto de la colonia de las bacterias c muere cada hora

24. Describe cómo cambian los valores y de cada gráfica a medida que aumenta el valor de x.

a. Gráfica a

b. Gráfica b

c. Gráfica c

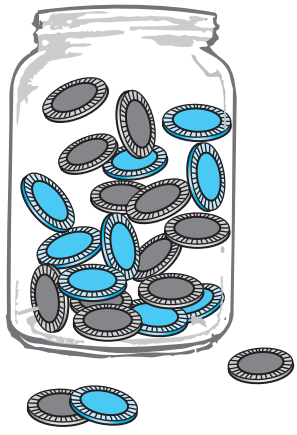


25. Probabilidad Kendra llena un frasco con 100 fichas, algunas azules y otras anaranjadas. Le pidió a Ignacio que adivinara cuántas fichas de cada color había en el frasco.

a. Ignacio metió la mano sin mirar y sacó 10 fichas, 4 azules y 6 anaranjadas. ¿Qué conjetura razonable podría hacer él para calcular el número de fichas de cada color?

b. Ignacio sacó 5 fichas más y todas fueron anaranjadas. ¿Qué conjetura razonable podría hacer ahora él para calcular el número de fichas de cada color?

c. Kendra le dice a Ignacio que de hecho hay tres veces más fichas anaranjadas que azules. ¿Cuántas hay de cada una?



CONTENTS

Resumen del capítulo

VOCABULARIO
factorización
trinomio

Las expresiones cuadráticas pueden resolverse con varios métodos. En este capítulo, empezaste usando la vuelta atrás para resolver ecuaciones cuadráticas de una forma particular así como ecuaciones que requieren calcular recíprocos, sacar raíces cuadradas y cambiar signos. También aprendiste a cómo resolver algunas ecuaciones cuadráticas al *factorizar* y usar el hecho que cuando un producto es igual a 0, al menos uno de los factores debe ser igual a 0.

Como estos métodos no se pueden aplicar a todas las ecuaciones cuadráticas, también aprendiste a cómo *completar el cuadrado* y usar la *fórmula cuadrática:*

$$x = \frac{^{-}b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Estrategias y aplicaciones

Las preguntas de esta serie te ayudarán a revisar y aplicar las ideas y estrategias importantes desarrolladas en este capítulo.

Usa la vuelta atrás para anular raíces cuadradas, cuadrados, recíprocos y cambios de signo

1. Identifica la operación que anula cada operación dada. Observa las advertencias, si las hay, que debes hacer para anular una operación dada.

a. sacar la raíz cuadrada

b. obtener el recíproco

c. cambio de signo

d. elevar al cuadrado

Indica si puedes resolver cada ecuación directamente usando la vuelta atrás. Si es así, dibuja un flujograma y calcula la solución. Si no, explica por qué no.

2. $\sqrt{2x + 3} - 4 = 7$

3. $\frac{24}{y - 7} = 4$

4. $3a - \sqrt{2a + 3} - 4 = 7$

5. $3(v - 1)^2 + v = 8$

6. $3 - (11w - 3) = 72$

7. $(4n + 5)^2 - 3 = 6$

Resuelve ecuaciones con factorización

Menciona si puedes resolver cada ecuación por factorización con enteros. Si puedes, hazlo y muestra tu trabajo. Si no, explica por qué no.

8. $g^2 + 3g = -6$

9. $81x^2 + 1 = -18x$

10. $3k^2 - 5k - 12 = 12 + 2k^2$

11. $4w^2 - 9 = 0$

12. $(x + 5)(x - 1) = -8$

13. $2s^2 - 4s + 2 = 0$

Resuelve ecuaciones cuadráticas completando el cuadrado

14. Explica qué quiere decir resolver "completando el cuadrado". Usa la ecuación $4x^2 + 20x - 8 = 0$ para ilustrar tu explicación.

15. Da un ejemplo de una ecuación cuadrática que sea posible, pero no fácil de resolver completando el cuadrado.

Entiende y aplica la fórmula cuadrática

16. ¿Cómo se derivó la fórmula cuadrática? Es decir, ¿qué técnica o método se usó y en qué ecuación?

17. Supón que a, b, c y d son números no iguales a 0. Explica por qué la solución de $ax^2 + bx + c = d$ no es $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$.

18. ¿Cómo puedes determinar el número de soluciones de una ecuación cuadrática en la forma $ax^2 + bx + c = 0$ usando el valor de $b^2 - 4ac$?

La ecuación cuadrática $F = 0.4v^2$ proporciona la resistencia (en una unidad llamada *newtons*) del aire en una carrera de autos, donde v es la velocidad del carro en m/s.

CONTENTS

Demuestra tus destrezas

Factoriza cada expresión.

19. $a^2 + 3a$ **20.** $2b^2 - 2$ **21.** $c^2 + 14c + 49$

22. $8d^2 - 8d + 2$ **23.** $e^2 + 8e - 9$ **24.** $f^2 + 7f + 10$

Escribe una expresión equivalente para la expresión dada completando el cuadrado.

25. $4g^2 + 12g - 3$ **26.** $h^2 - 10h + 7$ **27.** $2j^2 + 24j$

Menciona cuántas soluciones tiene cada ecuación. (No las resuelvas.)

28. $k^2 + 10 = 20k - 90$

29. $2m^2 + 3m + 3 = {}^-5$

Si es posible, resuelve cada ecuación.

30. $\sqrt{3n + 1} = 13$

31. $\frac{60}{{}^-(2p - 3)} = 12$

32. $(7q + 3)(q - 8) = 0$

33. $(10r + 4)(5r + 4) = {}^-2$

34. $4s^2 + 3s - 40 = 3s - 41$

35. $t^2 - 100 = 0$

36. $2u^2 - 4u = 14$

37. $9v^2 - 3 = 4v^2 + 32$

38. $5w^2 = 8w$

39. $3 - 9x - x^2 = 17$